Metodi adattivi per eq. diff ordinarie

Ad ogni t_n, è scelto un passo a priori diverso, h_n, in modo tale che

$$\max_{0 \le n \le N_h} |y(t_n) - u_n| \le \varepsilon$$

dove ε = tolleranza data in input

$\forall n \geq 0$: scelgo h_n

$t_{n+1} = t_n + h_n$

$u_{n+1} =$ EE, EI, ... (con EE $u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$)

se $\boxed{|y(t_{n+1}) - u_{n+1}| \le \varepsilon}$ non conosco la sol esatta

accetto h_n, accetto u_{n+1}

incremento n

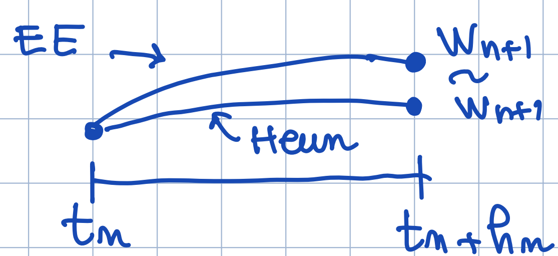
altrimenti

$h_n = h_n / 2$

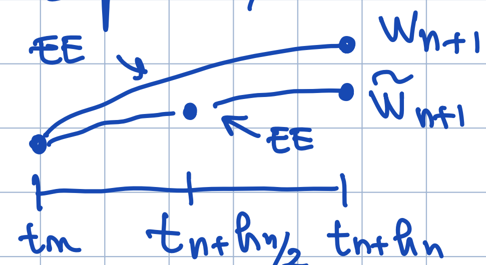
devo sostituire l'errore vero $|y(t_{n+1}) - u_{n+1}|$ con uno stimatore dell'errore

Procedura:

(1) calcolo 2 soluzioni numeriche con 2 metodi $\neq$ oppure con lo stesso metodo e 2 passi $\neq$



o



w_{n+1} e $\tilde{w}_{n+1}$ sono le 2 sol numeriche

(2) Sfruttando le stime dell'errore, trovo una relazione tra l'errore $|y(t_{n+1}) - u_{n+1}|$ e

$$|w_{n+1} - \tilde{w}_{n+1}| = \text{stimatore dell'errore.}$$

Cerco $|y(t_{n+1}) - u_{n+1}| \le \dfrac{|w_{n+1} - \tilde{w}_{n+1}|}{C_{n+1}}$ t.c.

se $|w_{n+1} - \tilde{w}_{n+1}| \le C_{n+1} \cdot \varepsilon \Rightarrow$

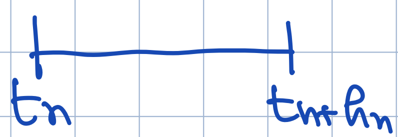
$$|y(t_{n+1}) - u_{n+1}| \le \varepsilon$$

C_{n+1} dipende dai metodi scelti

(3) → se $|w_{n+1} - \tilde{w}_{n+1}| \le C_{n+1} \cdot \varepsilon$

accetto h_n e def $t_{n+1} = t_n + h_n$

accetto la sol w_{n+1} o $\tilde{w}_{n+1}$ come nuova sol numerica u_{n+1}



incremento h_n, ad es $h_n = h_n * 2$

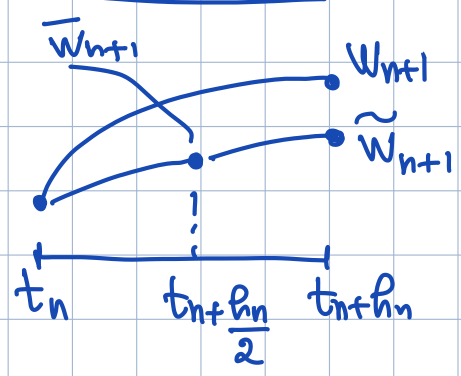
→ altrimenti

$h_n = h_n / 2$

ritorno al passo (1)

Per evitare che h_n diventi troppo piccolo si usa una h_{min} : $h_n \geq h_{min}$

Eulero esplicito adattivo



$$w_{n+1} = u_n + h_n f(t_n, u_n)$$

$$\begin{cases} \overline{w}_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, u_n) \\ \tilde{w}_{n+1} = \overline{w}_{n+1} + \frac{h_n}{2} f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \overline{w}_{n+1}\right) \end{cases}$$

facendo i conti, sfruttando le stime dell'errore

si ha $C_{n+1} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq k \leq n} |u_k|$

Algoritmo di EE adatt.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ t_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Input : f, tspan $= [t_0, T]$, y_0, $\underset{\text{toll}}{\varepsilon}$, h_{min}

Output : tn, un ← soluz numerica

tn: passi temporali

```
h = (tspan(2) - tspan(1))/10   % inizializzo h
tn = [tspan(1)]
un = [y0]
t = tn(1) ; u = un(1) ;   % ultimo tempo e ultima sol disponibili
while t < tspan(2)
```

```
w = u + h * f(t,u)   % 1 passo EE con h

wbar = u + h/2 * f(t,u)   % 1 passo EE con h/2
wtilde = wbar + h/2 * f(t+h/2, wbar)
if |w-wtilde| ≤ 1/2 norm(un,inf) * ε  or  h < hmin
```

$$\underbrace{\text{norm(un,inf)}}_{\max_{0\le k\le n} |u_k|}$$

```
    un = [un; wtilde]
    tn = [tn; t+h]
    h = h*2
    t = tn(end) ; u = un(end)
```

accetto la soluz e il passo h

```
else
    h = h/2
end
end
```