9/11/26

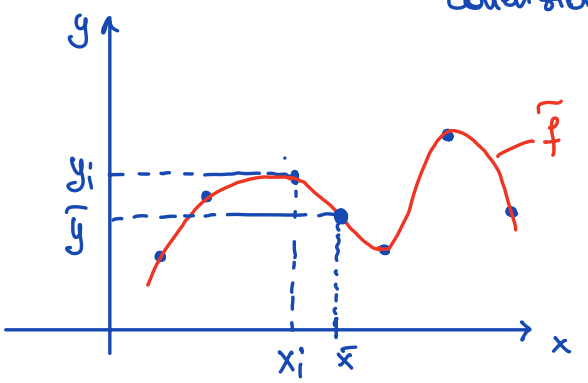
Interpolazione di funzioni e dati

2 problematiche:

1) Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ con $i = 0, \dots, n$

? $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\boxed{\tilde{f}(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, \dots, n}$

condizioni di interpolazione



Poter stimare $\tilde{f}(\bar{x}) = \bar{y}$ con $\bar{x} \neq x_i$

2) Data $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cerco $\tilde{f} : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

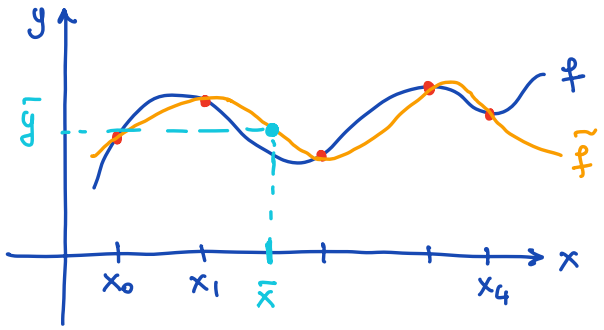
t.c. $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$ per $i = 0, \dots, n$ e x_i punti assegnati nel dom di f

perché: (1) per calcolare $\int$: invece di calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ calcolo $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$

(2) per calcolare derivate : invece di calcolare f' calcolo $\tilde{f}'$

Tipicamente $\tilde{f}$ è un polinomio o una unione di pezzi di polinomi

$\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$, y_i



$\tilde{f}$ ⟨ polinomio globale sull'intervallo $[x_0, x_n]$
funzione polinomiale a tratti su $[x_0, x_n]$
spline

Interpolazione polinomiale globale di Lagrange (1736-1813)

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ con $i = 0, \dots, n$

? calcolare $\tilde{f}(x) = p_n(x) \in \mathbb{P}_n$ (spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq n$)

t.c. $p_n(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n$ $\quad (x_i, y_i)$

Teorema: Dati $(n+1)$ punti distinti $\forall$ in $\mathbb{R}^2$ con x_i tutti distinti per $i = 0, \dots, n$,

$\exists\,!\; p_n \in \mathbb{P}_n$ t.c. $p_n(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n$

Scrivo $p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$

p_n è univocamente determinato da $(n+1)$ coefficienti, per trovarlo impongo le cond di interp.

$p_n(x_0) = y_0$
$p_n(x_1) = y_1$
$\vdots$

$$\begin{cases} a_1 x_0^n + a_2 x_0^{n-1} + \dots + a_n x_0 + a_{n+1} = y_0 \\ a_1 x_1^n + a_2 x_1^{n-1} + \dots + a_n x_1 + a_{n+1} = y_1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$p_n(x_n) = y_n \qquad \left| \begin{array}{c} \vdots \\ a_1 x_n^n + a_2 x_n^{n-1} + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = y_n \end{array} \right.$$

↑ ho $n+1$ eqz

$$X\,\underline{a} = \underline{y}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

matrice di Vander-Monde $(n+1) \times (n+1)$

se gli x_i sono distinti $\Rightarrow$ X è non singolare

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \text{vett incognito}, \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ vettore termine noto}$$

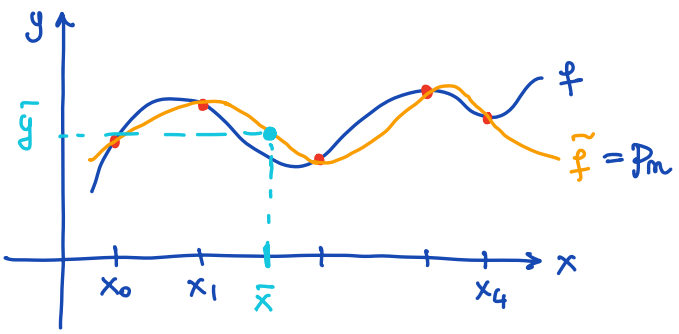
poiché X è non sing $\Rightarrow \exists!\ \underline{a}$, cioè $\exists!$ polinomio p_n che interpola i dati (x_i, y_i), i cui coeff sono le componenti di $\underline{a}$.

Algoritmo

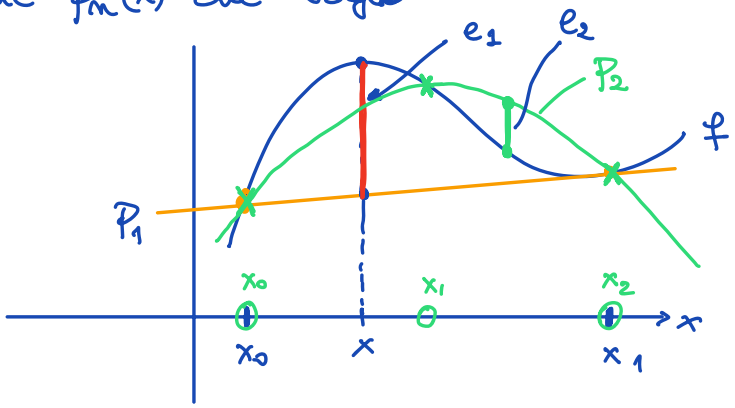
- $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dati
- costruisco $X = \text{vander}(\underline{x})$
- risolvo il sist lin $X\,\underline{a} = \underline{y}$ (non è sdp)
- se devo valutare $p_n(\bar{x})$:

  xs = ...

ys = polyval (a, xs)



Supponga di partire da f vera, posso prendere un n° arbitrario di punti x_i (n), posso costruire tutti i polinomi di interpolazione $p_n(x)$ che voglio



$$e_n = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - p_n(x)| = \|f - p_n\|_\infty \quad \text{norma del max}$$

? Se $n \to \infty$ $\|f - p_n\|_\infty \to 0$? in genere NO

dipende dalla forma di partenza f e dai nodi x_i

(x_i = nodi di interpolazione)

Teorema Sia $f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$ (I). Allora $\forall x \in I$, $\exists \xi_x \in I$ (dove ξ_x dipende da x_i) t.c.

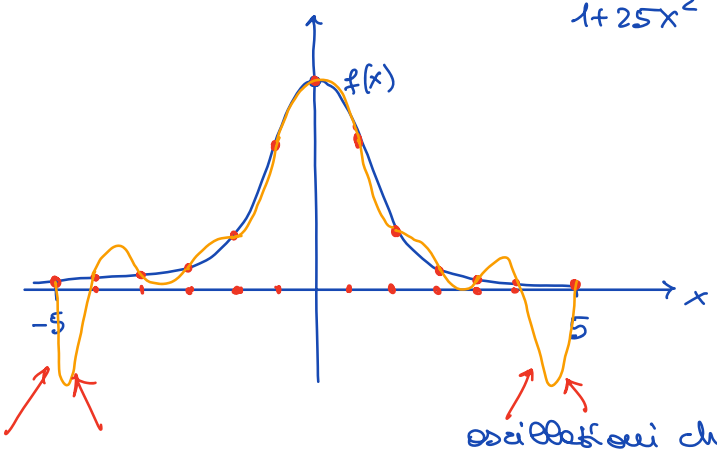
$$\underbrace{p_n(x) - f(x)}_{I} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

l'errore nel punto x dipende da n, dalla f, dai nodi x_i

Osservazione: se i nodi x_i sono equispaziati allora non è garantito che $\|f - p_n\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$, dipende da f.

Controesempio di Runge $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, $I = [-5, 5]$

$n = 12$
nodi equisp

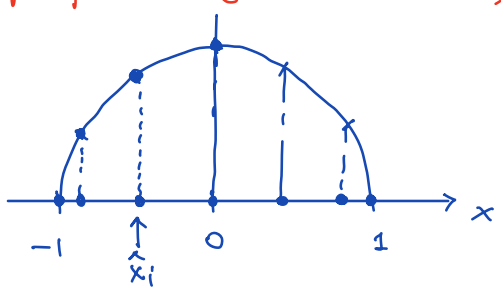


oscillazioni che crescono in ampiezza al crescere di n

Rimedio 1 prendere nodi non equispaziati (scelte oculate)

es: nodi di Chebyshev

su $[-1, 1]$ $\quad \hat{x}_i = -\cos\left(\dfrac{\pi i}{n}\right)$ per $i = 0, \dots, n$



$n = 6$

su $[a, b]$ $\quad x_i = \dfrac{(b-a)}{2}\hat{x}_i + \dfrac{b+a}{2}$ per $i = 0, \dots, n$

Teorema Se $f \in C^{n+1}(I)$ e i nodi x_i sono i nodi di Chebyshev

allora $\|f - p_n\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$

(maggiore è il n° di punti e migliore è l'interpolazione)

Altre famiglie : nodi di Legendre

Rimedio 2 : Interpolazione composita di Lagrange

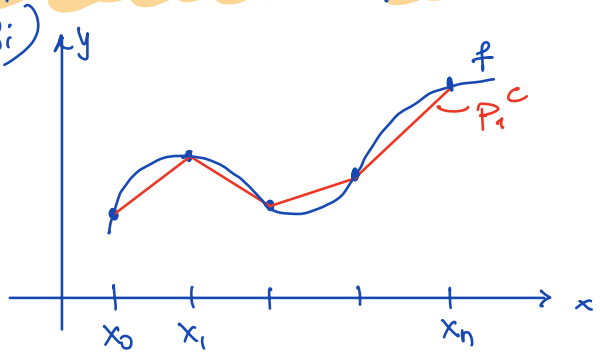
Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ con $i=0, \dots, n$

? $p_1^c(x)$: $-\ p_1^c \in C^0([x_0, x_n])$ globalmente continua

$-\ p_1^c(x_i) = y_i$ per $i=0,\dots,n$ condiz di interp.

$-\ p_1^c\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1$ su ogni intervallino p_1^c è un polinomio di grado 1

$p_1^c(x)$ è detto interpolatore lineare composito di Lagrange dei dati (x_i, y_i)



def $H = \max_i |x_{i+1} - x_i|$, ho il seguente teorema

Teorema Se $f \in C^2([x_0, x_n]) \Rightarrow \exists\, C > 0$ t.c.

$$0 \le \|f - p_1^c\|_\infty \le C \cdot H^2 \cdot \|f''\|_\infty .$$

$$\downarrow \qquad \Leftarrow \qquad \downarrow$$

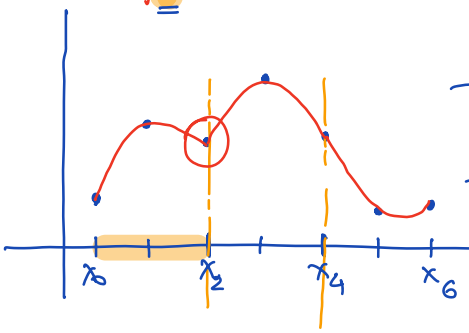
$$0 \qquad\qquad 0$$

Se $H \to 0$ (il n° dei punti $\to +\infty$) $\Rightarrow$ l'errore tra f e $p_1^c \to 0$ e l'errore decresce al + come H^2; diciamo che l'errore decresce quadraticam. rispetto ad H o che p_1^c converge quadrati=

convergente ad f nella norma del max rispetto ad H, quando $H \to 0$.

Invece di p_1^c voglio costruire p_2^c

- $p_2^c \in C^0([x_0, x_n])$
- $p_2^c(x_i) = y_i$
- $p_2^c\Big|_{[x_{2k}, x_{2k+2}]} \in \mathbb{P}_2$ con $k = 0, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$

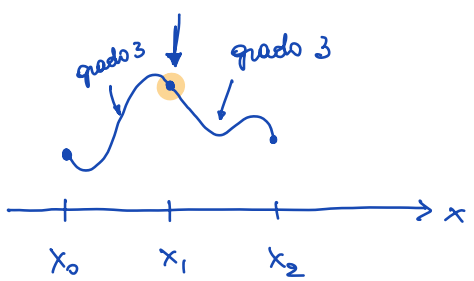


- cresce il grado locale,
- decresce l'errore rispetto a prima,
- ma non cresce la regolarità (p_2^c è solo continua)

SPLINE CUBICHE

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 0, \dots, n$

? s_3 :
- $s_3 \in C^2([x_0, x_n])$ (globalmente di classe C^2)
- $s_3(x_i) = y_i$ $i = 0, \dots, n$ (condiz di interp)
- $s_3\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$ (localm pol di grado 3)



Nei punti x_i (interni all'intervallo) si impone che il pol di grado 3 da sx e il pol di grado 3 da dx abbiano la stessa derivata prima e la stessa derivata seconda e

siano continue -

su $[x_i, x_{i+1}]$ cerco $a_1^{(i)} x^3 + a_2^{(i)} x^2 + a_3^{(i)} x + a_4^{(i)}$

su $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ " $a_1^{(i+1)} x^3 + a_2^{(i+1)} x^2 + a_3^{(i+1)} x + a_4^{(i+1)}$

sono polinomi, ne calcolo le derivate e impongo che siano = nel punto x_{i+1} e che si abbia continuità nel punto.

n° incognite = 4 · n° di intervalli = $4 \cdot n$

n° equazioni $\left.\begin{array}{l} n+1 \quad \text{(cond di interp)} \\ (n-1) \cdot 3 \\ \uparrow \\ \text{n° nodi interni} \end{array}\right] = n+1 + (n-1)\cdot 3 = 4n-2$

Ho n° di eqz < n° incognite $\Rightarrow$ ∞ soluzioni

devo aggiungere altre 2 condizioni

1) imporre $S_3'(x_0) = \text{dato}$ e $S_3'(x_n) = \text{dato}$ SPLINE VINCOLATE

2) imporre $S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$ SPLINE NATURALI

3) imporre $S_3'''(x_1)$ e $S_3'''(x_{n-1})$ siano continue SPLINE NOT-A-KNOT

16/11/26

Teorema (errore per le spline cubiche)

Se $f \in C^4([x_0, x_n])$ e $H = \max_{0 \le k \le n} |x_{k+1} - x_k|$ allora

$$\|f - S_3\|_\infty \le C \cdot H^4 \, \|f^{IV}\|_\infty$$

dove $C > 0$ costante -

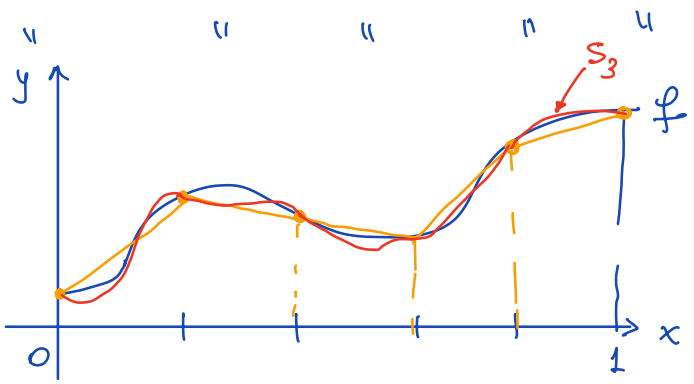
Oss: L'errore tende a zero per $H \to 0$ con ordine 4.

ES: f regolare $(f \in C^4 \text{ su } [0,1])$

n nodi in $[0,1]$

? $p_1^c(x)$ che interpola f in questi nodi

? $s_3(x)$ " " " " "



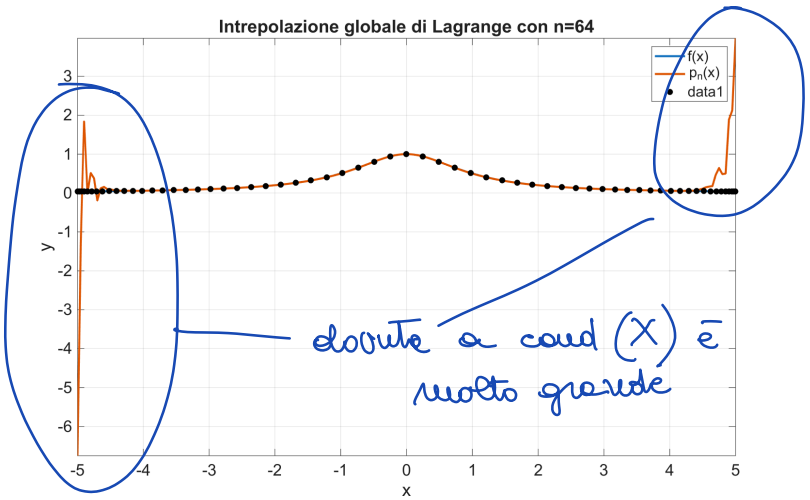
$$\|f - p_1^c\|_\infty \le C_1 H^2 \|f''\|_\infty$$

$$\|f - s_3\|_\infty \le C_2 H^4 \|f^{IV}\|_\infty$$

se $H \to 0$, $H^4 \to 0$ più veloc di H^2

la spline produrrà un'appr migliore.

Data $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$? interpolatore globale di Lagrange su $[-5, 5]$, nodi di Chebyshev.



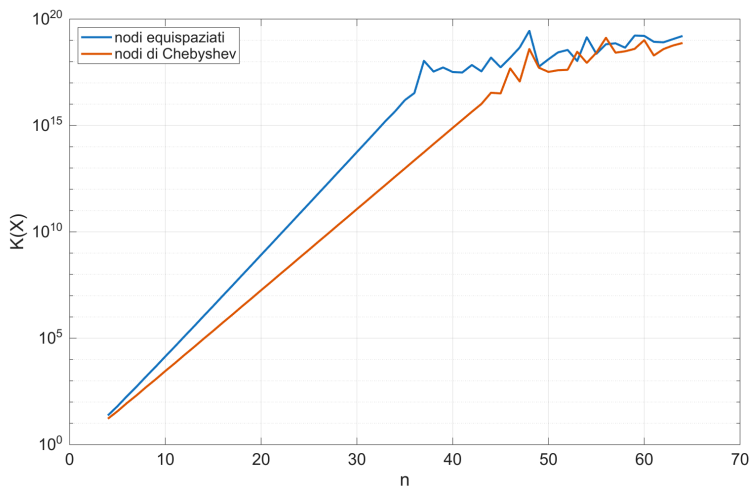
Sto risolvendo $X\underline{a} = \underline{y}$

$\underline{a}$ = vettore dei coeff di $p_n(x)$

X = matrice di Vander definita a partire dai nodi x_i

$\underline{y} = [y_0, y_1, \dots, y_n]$

nodi di Chebyshev



se $N = 40$ $K(X) \approx 10^{15}$, pensando di partire solo da errori di arrotondamento $\sim 10^{-16}$

la stima a priori dice $\frac{\|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\|}{\|\underline{x}\|} \leq K(A)\left(\frac{\|A-\hat{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|\underline{b}-\hat{\underline{b}}\|}{\|\underline{b}\|}\right)$

$\hat{\underline{x}}$ sol numerica, $\underline{x}$ sol esatta

(se devo risolvere $A\underline{x} = \underline{b}$)

e nel calcolare $\underline{a}$ commetto un errore $\sim 10^{-1}$

L'alternativa nel calcolare $p_n(x)$ consiste nel non contare X.

? $\underbrace{p_n(x)}_{\in \mathbb{P}_n}$ che interpola f in $(n+1)$ nodi x_i t.c.

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{per } i = 0, \dots, n.$$

$\mathbb{P}_n$ = sp vettoriale di dimensione finita pari a $n+1$

$$p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$$

$$\mathcal{B}_{\text{monomi}} = \{ x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1 \}$$

Considero la base dei polinomi di LAGRANGE

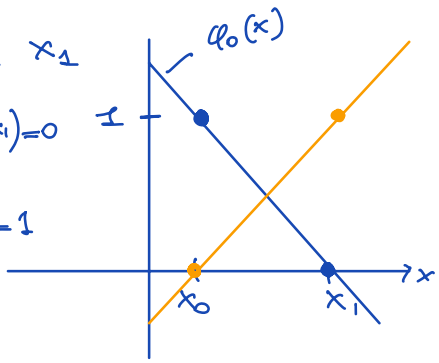
$$\mathcal{B}_L = \left\{ \varphi_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \quad \text{per } j = 0, \dots, n \right\}$$

$$\varphi_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \in \mathbb{P}_n$$

es $n=1$ ho 2 nodi di interp x_0 e x_1

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{(retta)} \quad \varphi_0(x_0) = 1, \ \varphi_0(x_1) = 0$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad \text{(retta)} \quad \varphi_1(x_0) = 0 \quad \varphi_1(x_1) = 1$$



es $n=2$ ho 3 nodi di interp x_0, x_1, x_2

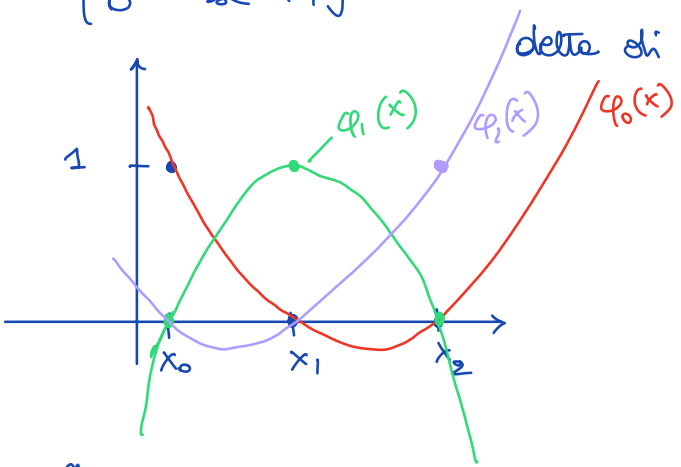
$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \text{parabola} \qquad \varphi_0(x_0)=1 \quad \varphi_0(x_1)=0 \quad \varphi_0(x_2)=0$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad \varphi_1(x_0)=0 \quad \varphi_1(x_1)=1 \quad \varphi_1(x_2)=0$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \qquad \varphi_2(x_0)=0 \quad \varphi_2(x_1)=0 \quad \varphi_2(x_2)=1$$

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

delta di Kronecker



$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x)$$

(espressione di $p_n(x)$ rispetto alla base di Lagrange)

? cerco p_n : $p_n(x_i) = f(x_i)$

$x = x_i$

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underbrace{\varphi_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = \alpha_0 \underbrace{\varphi_0(x_i)}_{0} + \alpha_1 \underbrace{\varphi_1(x_i)}_{0} + \dots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{1} + \dots + \alpha_n \underbrace{\varphi_n(x_i)}_{0}$$

$$= \alpha_i \cdot 1 = f(x_i)$$

i coeff α_i dello sviluppo di p_n rispetto alla base di Lagrange sono i valori $f(x_i)$ che già conosco.

$$\Rightarrow \boxed{p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \varphi_j(x)}$$

noti

L'unica difficoltà è valutare φ_j nei punti x che voglio considerare, non devo risolvere alcun sistema lineare -

Formula baricentrica serve per valutare le φ_j nei punti che voglio