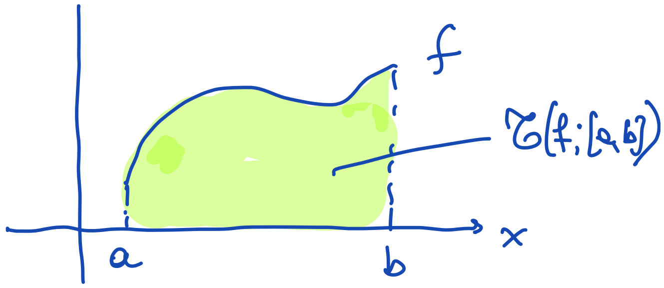
Integrazione numerica
Formule di quadratura

Dati $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\quad f$ continua

? $I=\int_a^b f(x)\,dx$ usando solo valori di f in certi punti



Area del trapezoide

$$\mathcal{T}(f;a,b): A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

↑ trapezoide

Se f è appx da $\tilde{f}$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$

Se $\tilde{f}$ = pol di interpolazione globale di Lagrange di grado n

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} \underbrace{f(x_i)}_{y_i}\,\varphi_i(x)$$

↑ funz di base di Lagrange

$$\varphi_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$\int_a^b P_n(x)\,dx=\int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\varphi_i(x)\,dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\boxed{\int_a^b \varphi_i(x)\,dx}\quad w_i \ \text{pesi}$$

$$\tilde{I} = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i$$

$\tilde{I}$ è un' appx di I

x_i: nodi di quadratura $\equiv$ nodi di interp. di f

w_i: pesi di quadratura

$$w_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx = (b-a)\boxed{\int_0^1 \hat{\varphi}_i(\hat{x})\,d\hat{x}}$$

$\rightarrow$ $x = (b-a)\hat{x} + a$

$dx = (b-a)\,d\hat{x}$

se $x = a \Rightarrow \hat{x} = 0$

se $x = b \Rightarrow \hat{x} = 1$

$\hat{w}_i$ sono tabulati (noti)

dove $\hat{\varphi}_i(\hat{x}) = \varphi_i(x)$ sono le trasformazioni delle φ_i

N.B. Se $f(x) \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i = \sum_{i=0}^{n} w_i \\ = \int_a^b 1\,dx = (b-a) \end{cases}$

$$\sum_{i=0}^{n} w_i = b-a$$

riesco sempre a integrare esattamente $f(x) \equiv 1$.

$$? \quad |I - \tilde{I}| = \left| \int_a^b f(x) - \int_a^b p_n(x) \right| = \left| \int_a^b f(x) - p_n(x)\,dx \right|$$

I: esatto, $\tilde{I}$: appx

$$\leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)|\,dx$$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| = \|f - p_n\|_\infty$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{\|f-P_n\|_\infty}_{\text{è indip da } x} dx = \|f-P_n\|_\infty \cdot \underbrace{\int_a^b 1\, dx}_{(b-a)}$$

$$= \|f-P_n\|_\infty (b-a)$$

$$|I-\tilde{I}| \leq \|f-P_n\|_\infty (b-a)$$

err sull'$\int$ è controllato dall'errore di interp.

Attenzione ad usare nodi equispaziati e gradi di interpolazione alti, (fenomeno di Runge)

Def Una f. di q. è aperta se i nodi di quadr. sono interni all'intervallo (a,b)

$$x_i \in (a,b) \quad \forall i$$

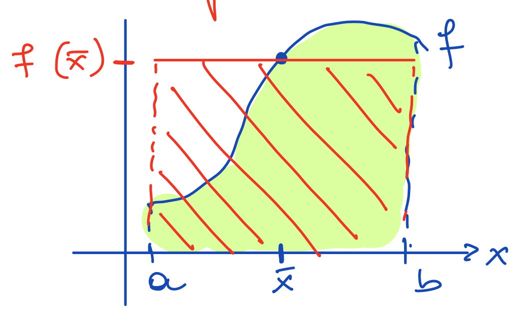
Una f.d.q. è chiusa se gli estremi a e b dell'intervallo sono nodi di quadr.

Formula di quadratura del punto medio

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ pto medio

$I = \int_a^b f(x)\, dx$



$I_{PM} = f(\bar{x})(b-a)$ $\quad = I_{PM} \quad = I$ | $\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i$

1 nodo di quadratura $= \bar{x} = \frac{b+a}{2}$

$x_0 = \bar{x}$ e $w_0 = b-a$

$I_{PM} \neq I$? $|I - I_{PM}|$ errore di quadratura della form di PM.

Thm: Se $f \in C^2([a,b])$, allora $\exists\, \xi \in (a,b)$:

↑ non è noto

$$I - I_{PM} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi) .$$

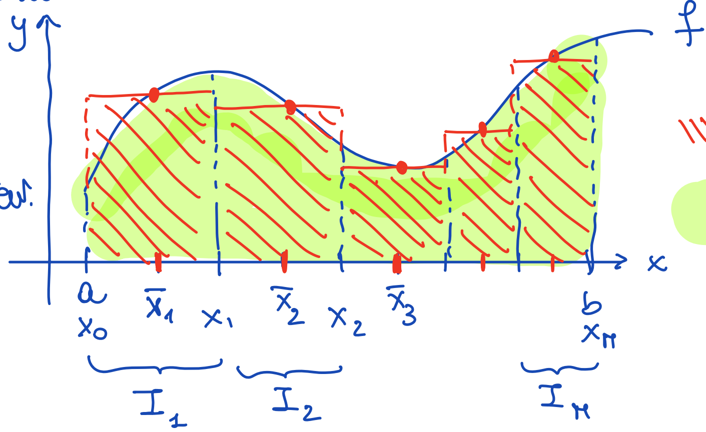
e $|I - I_{PM}| \le \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$

Punto medio - formula composita

Divido $[a,b]$ in M sotto intervalli e su ognuno applico p.medio

$k = 1, \dots, M$ indice dell'interv.

$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$



$= I^c_{PM}$

$= I$

$$I^c_{PM} = \sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$ f. del pto medio composito

$H = \max_k |x_k - x_{k-1}|$ max ampiezza intervallini

per $H \to 0$ $\quad I^c_{PM} \to I$

Teorema Se $f \in C^2([a,b]) \Rightarrow$

$$\boxed{|I - I^c_{PM}| \leq \frac{(b-a)}{24} \cdot H^2 \|f''\|_\infty}$$

Infatti:

$$I - I^c_{PM} = \sum_{k=1}^{M} (I - I_{PM})\Big|_{I_k} = \sum_{k=1}^{M} \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{24} \cdot f''(\xi_k)$$

$$\leq \frac{H^2}{24} \sum_{k=1}^{M} (x_k - x_{k-1}) \cdot f''(\xi_k) \qquad (x_k - x_{k-1}) \leq H$$

$$\leq \frac{H^2}{24} \cdot \|f''\|_\infty \underbrace{\sum_{k=1}^{M} (x_k - x_{k-1})}_{b-a} .$$

Se $H \to 0$, $\frac{b-a}{24} H^2 \|f''\|_\infty \to 0 \Rightarrow$ anche

$|I - I^c_{PM}| \to 0$

Inoltre è errore $|I - I^c_{PM}| \to$ come H^2

cioè la f. di pm comp converge quadraticamente all'integrale esatto

Se f è un polinomio di grado 1 la f. di punto medio (sempl e composita) calcola esattam. l'integrale esatto. Si dice che è esatta.

Def Una f di q ha <u>grado di esattezza</u> p se integra esattamente tutti i polinomi di grado p ma non tutti i polinomi di gradi > p.

ES. PM ha grado di esattezza 1.

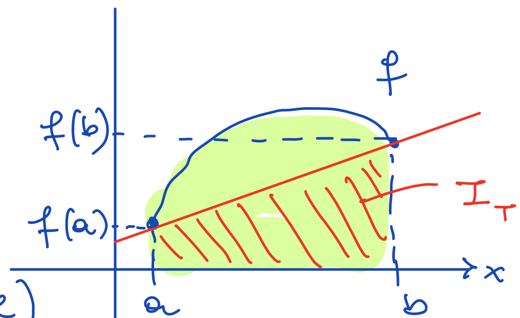
Def Una f di q composita ha ordine di accuratezza (o convergenza) q se l'errore va a zero come H^q quando $H \to 0$

ES. PM comp ha ordine di accuratezza 2.
(cioè se H diminuisce di 1 ordine, l'errore diminuisce di 2)

Formula del trapezio

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

? $I = \int_a^b f(x)\,dx$



$f \sim P_1$ (interp di Lagrange di grado 1)

$I_T = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$ è una formula chiusa

$I_T = f(a) \cdot \frac{(b-a)}{2} + f(b) \frac{(b-a)}{2} = \sum_{i=0}^{1} f(x_i)\, w_i$

$x_0 = a \qquad x_1 = b$

$w_0 = \frac{b-a}{2} \qquad w_1 = \frac{b-a}{2}$

Thm: Se $f \in C^2([a,b]) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$:

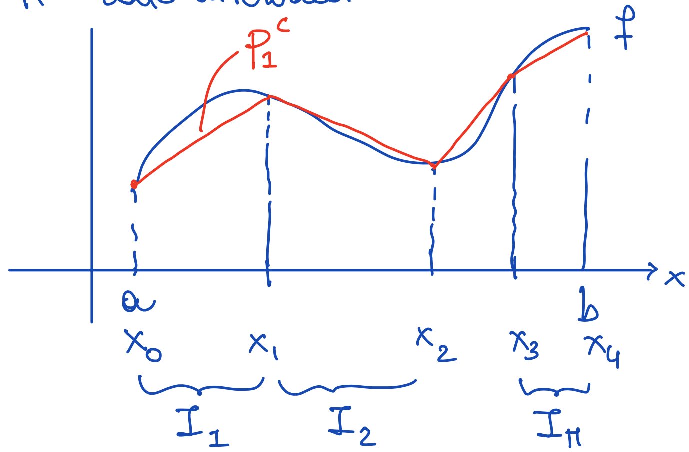
$$I - I_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

e $|I - I_T| \le \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$ — errore per trapezi semplice

Trapezi composita

suddividendo $[a,b]$ in M sotto intervalli

$f \sim p_1^c$



$$I_T^c = \sum_{k=1}^{M} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1})$$

Appx I con trap composito equivale ad appx f con l'interpolatore composito di Lagr. di grado 1

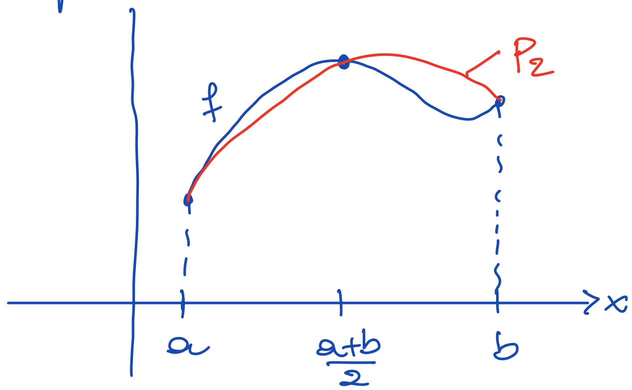
Thm: Se $f \in C^2([a,b])$

$$\Rightarrow |I - I_T^c| \le \frac{(b-a)}{12} H^2 \|f''\|_\infty$$

cioè trap. comp ha ordine di accuratezza 2
ed ha grado di precisione 1

Formula di Simpson

$f \sim p_2$ = pol di interp di Lagrange che interpola
f nei nodi $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$
(equispaziati)



Se scrivo $p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, \varphi_i(x)$

ho che $\quad I_s = \int_a^b \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, \varphi_i(x)\, dx = \dots\dots$

$$= \frac{b-a}{6}\Big[\underbrace{f(x_0)}_{a} + 4\underbrace{f(x_1)}_{\frac{a+b}{2}} + \underbrace{f(x_2)}_{b}\Big]$$

osservate $\quad w_0 = \frac{b-a}{6} = w_2$

$w_1 = \frac{4}{6}(b-a) \quad \Rightarrow \quad \sum w_i = b-a$

Thm Se $f \in C^4([a,b]) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$:

$$I - I_S = -\frac{(b-a)^5}{18 \cdot 160} f^{IV}(\xi)$$

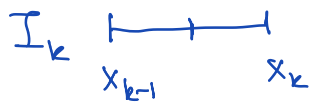
$$|I - I_S| \leq \frac{(b-a)^5}{18 \cdot 160} \| f^{IV} \|_\infty$$

ha grado di precisione $= 3$

Simpson composita

M intervallini, su ognuno applico Simpson

$$I_S^c = \sum_{k=1}^{M} \frac{(x_k - x_{k-1})}{6} \left[f(x_{k-1}) + 4 f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right) + f(x_k) \right]$$



Thm
Se $f \in C^4([a,b]) \Rightarrow$

$$|I - I_S^c| \leq \frac{(b-a)}{18 \cdot 160} H^4 \| f^{IV} \|_\infty$$

grado di precisione $= 3$
ordine di accuratezza $= 4$

Di solito non si usano queste formule con n alto e nodi equispaziati su ogni intervallino (fenomeno di Runge)

Formule di quadratura Gaussiane

Sono formule interpolatorie

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i$$

dove i nodi x_i sono scelti opportunamente per garantire max grado di precisione e max ordine di acc. possibile.

Formule di Gauss Legendre

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

x_i = radici del polinomio di Legendre di grado $(n+1)$ ${}^{(n+1)}$

con $i = 0, \dots, n$

Polinomi di Legendre

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1}\, x\, L_n(x) - \dfrac{n}{n+1} L_{n-1}(x) \end{cases}$$

x_i sono calcolabili con Newton.

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)\left[L'_{n+1}(x_i)\right]^2} \qquad \text{per } i = 0, \dots, n$$

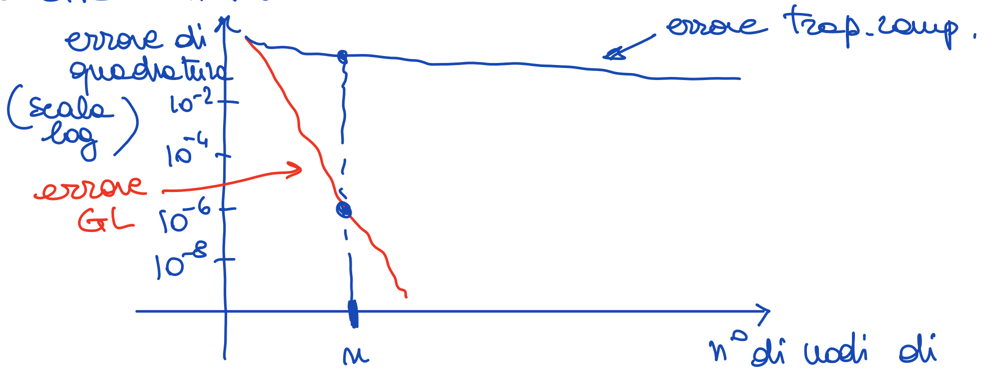
Thm: Se $f \in C^{2n+2}([-1,1]) \implies$

$$|I - \tilde{I}_{GL}| \le \underbrace{\frac{2^{2n+3}\left((n+1)!\right)^4}{(2n+3)\left((2n+2)!\right)^3}}_{\to 0 \text{ per } n\to\infty} \|f^{(2n+2)}\|_\infty$$

$\tilde{I}_{GL}$: Gauss Legendre

ho grado di precisione $= 2n+1$ (usando $n+1$ nodi)

la convergenza a zero dell'errore è molto rapida al crescita di n



GL sono molto + accurate delle formule di PM_c, T_c, S_c a parità di n° di nodi di quadratura.