Appx di eqz diff ord.

Problema di Cauchy del 1° ordine

Dati $I=(t_0,T)\subset\mathbb{R}$, $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y_0\in\mathbb{R}$

? funzione $y: I\to\mathbb{R}$ soluz di

$$
\begin{array}{ll}
\text{eqz diff.} & \left\{\begin{array}{ll} y'(t) = f(t, y(t)) & t\in(t_0,T) \\ y(t_0) = y_0 & \end{array}\right. \\
\text{cond. iniziale} &
\end{array}
$$

Teorema: Se f è continua e limitata rispetto alla variabile t e lipschitziana rispetto alla 2ª variabile y, cioè $\exists\, L>0$:

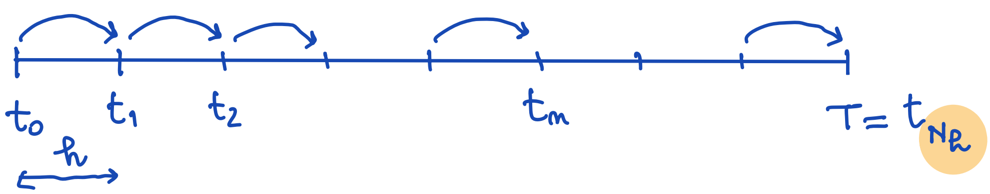
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq L\,|y_1-y_2| \qquad \forall\, y_1,y_2\in\mathbb{R} \text{ e } \forall\, t\in I,$$

allora $\exists!$ soluz $y(t)$ del pbl di Cauchy e $y\in C^1(I)$.

Obiettivo: appx la sol $y(t)$ in certi punti dell'intervallo I. Non cerco un'espressione di $y(t)$

Discretizzazione di I. Fisso $h>0$

e costruisco i punti $t_n = t_0 + nh$ in I

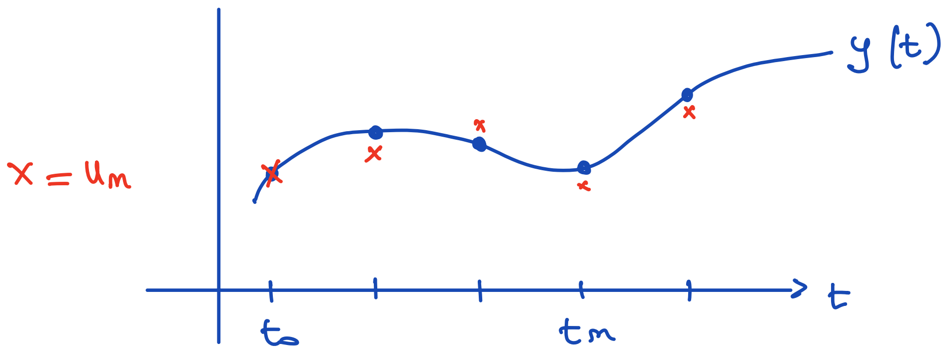


t_0 è noto, per $n = 1, \dots, N_h$ $t_n = t_0 + nh$
$= t_{n-1} + h$

N_h = n° di passi

Se $y(t_n)$ = valore della sol esatta al tempo t_n,

cerco $u_n \sim y(t_n)$ $\forall n$



costruisco $\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N_h}\}$ = soluzione numerica, con $u_0 = y_0$

Eulero in avanti (o Eulero esplicito)

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$t = t_n$

$$\underbrace{y'(t_n)}_{\text{appx con diff finita in avanti}} = f(t_n, y(t_n))$$

$$y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2} y''(\xi) h$$

voglio lavorare senza

(dallo studio dell'err della $\delta_+ f$)

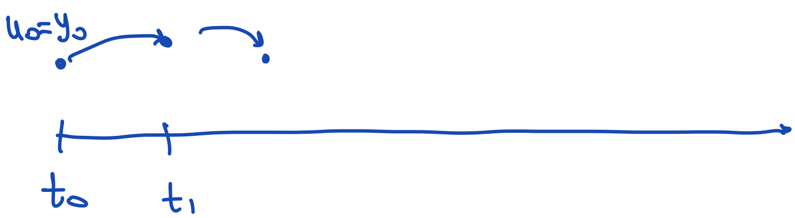
$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2} y''(\xi) h = f(t_n, y(t_n))$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

$u_n \sim y(t_n)$, ma a priori non è detto che $u_n = y(t_n)$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Eulero in avanti



$n = 0$

$$u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0)$$
$$u_2 = u_1 + h f(t_1, u_1)$$
$$\vdots$$

Metodo di Eulero all'indietro (o implicito)

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

$y'(t_n) \sim$ diff finita all'indietro

$$y'(t_n) = \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} + \frac{1}{2} y''(\xi) h$$

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} + \frac{1}{2} y''(\xi) h = f(t_n, y(t_n))$$

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = f(t_n, u_n)$$

Isolo u_n : $\underset{n+1}{u_n} = \underset{n}{u_{n-1}} + h f(\underset{n+1}{t_n}, \underset{n+1}{u_n})$

Eulero all'indietro o implicito

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Esempio : $y' = \cos(y) = f(t, y)$

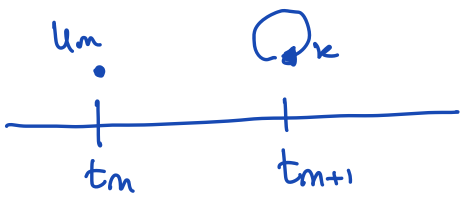
EI : $u_{n+1} = \underbrace{u_n + h \cdot \cos(u_{n+1})}_{\varphi(u_{n+1})}$

n è fisso

metodo di pto fisso per calcolare u_{n+1}

$$\begin{cases} u_{n+1}^{(0)} = u_n \\ u_{n+1}^{(k+1)} = u_n + h \cdot \cos(u_{n+1}^{(k)}) \end{cases}$$

per $k = 0, 1, \ldots$ fino a conv.



1° strategia per calcolare u_{n+1} : pto fisso

2° strategia : Newton o secanti

risolvo $u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$

cambia ad ogni n $\quad r(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n - h f(t_{n+1}, u_{n+1}) = 0$

calcolare u_{n+1} vuol dire risolvere l'eqz non lineare $r(u_{n+1}) = 0$
e applico Newton o secanti

EE è + semplice e meno costoso di EI.
EI ad ogni passo temp. richiede la risoluz di una eqz non lineare (se f è non lin) da risolvere con pto fisso o Newton o secanti

Metodo di CRANK–NICOLSON

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Applico il thm fondamentale del calcolo integrale nell'intervallo (t_n, t_{n+1})

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt}_{\text{appx con trapezi}}$$

$$\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right] \cdot \frac{h}{2} +$$

$$\frac{h^3}{12} f'''(\xi)$$

trascurando l'errore ho

CN $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$

è un metodo implicito

03/12/24

Metodo di Heun (o Runge Kutta di ordine 2)

ad ogni passo n

previsione $\tilde{u}_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$ EE

correzione $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})\right]$ CN

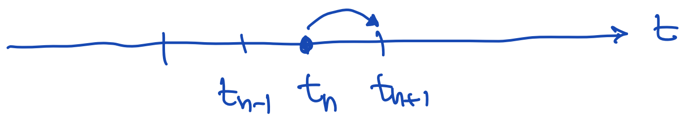
$u_0 = y_0$

È un metodo esplicito e un metodo di tipo

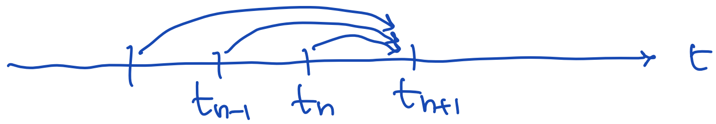
PREDICTOR – CORRECTOR
(esplicito) (implicito)

$\tilde{u}_{m+1} \longrightarrow u_{m+1} = \ldots\ldots f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})$

Def: Un metodo per risolvere eq. diff. ord. è AD UN PASSO se per calcolare u_{n+1} utilizzo unicamente la sol al passo precedente



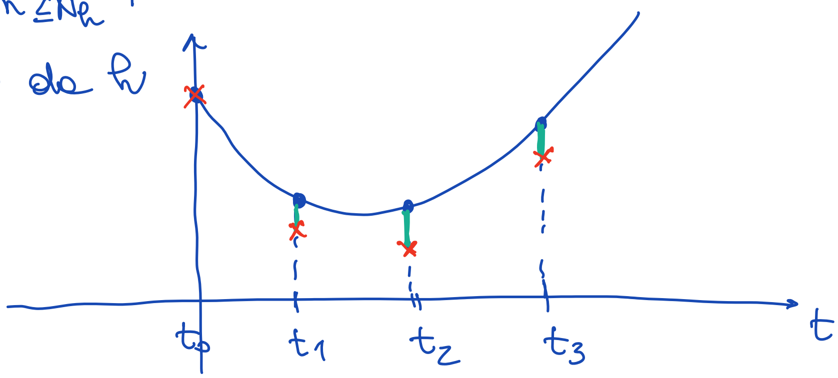
Def: Metodi MULTISTEP sono metodi che calcolano u_{n+1} utilizzando $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-p}$



Def Un metodo per approx e.d.o. è CONVERGENTE di ordine q se $\exists\, C>0$ e $q>0$:

$$err = \max_{0 \le n \le N_h} |y(t_n) - u_n| \le C \cdot h^q$$

è indip da h

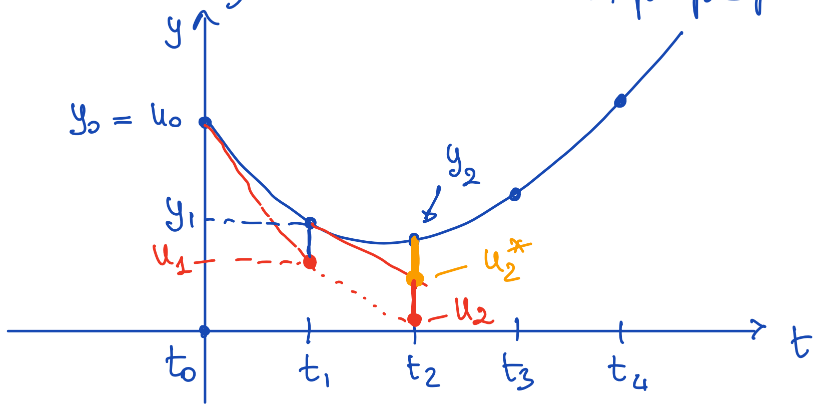


In laboratorio: con EE, EI

$h = 0.1$	$err = 0.3$	$q=1$
$h = 0.01$	$err = 0.03$	

Per studiare la converg di un metodo serve analizziamo: 1) l'errore che si introduce ad ogni passo

2) come l'errore si propaga



$y_n = y(t_n)$

$|y_1 - u_1|$

$$|y_2 - u_2| \le \underbrace{|y_2 - u_2^*|}_{} + \underbrace{|u_2^* - u_2|}_{}$$

errore dovuto a $y' \sim$ diff finita → CONSISTENZA

è conseguenza dell'errore introdotto al passo prec. → STABILITÀ

Def u_{n+1}^* = la soluzione ottenuta con il metodo numerico ma supponendo di partire dalla sol esatta al passo precedente

es: EE $\quad u_{n+1}^* = y_n + h\, f(t_n, y_n)$

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n)$$

Def Errore di troncamento locale

$$\tau_n(h) = \frac{y_n - u_n^*}{h}$$

Errore di troncamento globale

$$\tau(h) = \max_{0 \le n \le N_h} |\tau_n(h)|$$

Es: EE $\quad \tau_{n+1}(h) = \dfrac{y_{n+1} - u^*_{n+1}}{h} =$

$$= \frac{1}{h}\Big(\overbrace{\cancel{y_n} + \cancel{h\, y'(t_n)} + \tfrac{1}{2} h^2 y''(\xi_n)}^{y_{n+1}} - \overbrace{(\cancel{y_n} + \cancel{h\, f(t_n, y_n)})}^{u^*_{n+1}} \Big)$$

(scrivo y_{n+1} come sviluppo di Taylor centrato in t_n)

ricordo $y'(t) = f(t, y(t))$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_n) = \frac{1}{2} y''(\xi_n) \cdot h$$

è per EE legato al resto dello sviluppo di Taylor

$$\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)| = \frac{1}{2} \|y''\|_\infty \cdot h \quad (\text{per EE})$$

L'errore di troncamento locale (e globale) è legato a quanto bene appx la derivata prima o l'integrale (nel caso di CN)

È l'errore introdotto a ogni passo.

Def Un metodo è CONSISTENTE se

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$$

cioè se l'errore introdotto a ogni passo è as-simo per $h \to 0$

In maniera simile si ha che

EI : $\tau(h) = C \cdot h$

CN : $\tau(h) = C \cdot h^2$

Heun : $\tau(h) = C \cdot h^2$

Gli errori introdotti ad ogni passo si accumulano. Vogliamo che questo accumulo resti piccolo. La proprietà che un metodo deve soddisfare per garantire che l'accumulo resti piccolo è la stabilità.

ZERO-STABILITA'

Sia $\{u_n\}$ la sol numerica ottenuta con un metodo per l'appx di e.d.o., e sia $\{z_n\}$ la sol numerica ottenuta con lo stesso metodo, ma con dati perturbati. Per es con EE abbiamo

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \end{cases}$$

perturbazione

$$\begin{cases} z_0 = y_0 + \rho_0 \\ z_{n+1} = z_n + h \left[f(t_n, z_n) + \rho_n \right] \end{cases}$$

Dico che un metodo è zero-stabile se

$\exists C>0$ indip da h e da ε, $\exists \varepsilon_0>0$, $\exists h_0>0$:

$\forall h<h_0$ e $\forall \varepsilon<\varepsilon_0$ t.c. $|\delta_n|<\varepsilon$ $\forall n\geq 0$

si ha che $|z_n-u_n|\leq C\cdot\varepsilon$ $\forall n\geq 0$

zero-stab. perché mi interessa capire cosa succede quando $h\to 0$ e $N_h\to\infty$

Teorema 1: Se f del pbl di Cauchy è Lips
$\Rightarrow$ EE, EI, CN, Heun sono zero-stabili

Teorema 2: Se un metodo ad un passo è consistente

e zero-stabile allora è anche convergente
e l'ordine di convergenza è pari al grado di h nell'errore di tronc globale.

$\Rightarrow$ EE e EI sono conv. di ordine 1

CN e Heun sono conv di ordine 2

maggiore è l'ordine di conv e più preciso è il metodo quando $h\to 0$