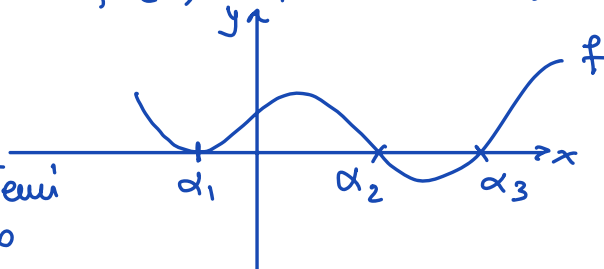


EQUAZIONI e SISTEMI NON LINEARI 24/09/24

Equazioni. Sia $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua
 so che $\exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = 0$, cioè α è radice di f

Metodi:

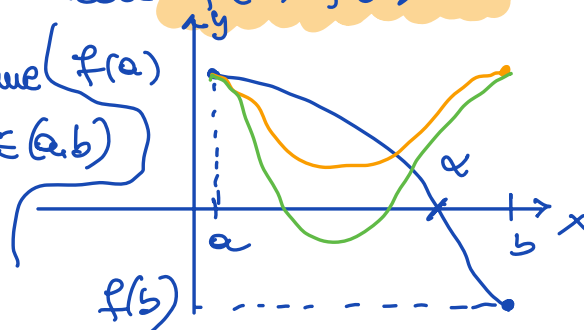
	eqz	sistemi
bisezione	✓	no
Newton	✓	✓
secanti	✓	✓ (generalizzazione)
punto fisso	✓	✓



METODO di BISEZIONE

$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$

(per il thm degli zeri di f , continua
 esiste almeno una radice $\alpha \in (a, b)$
 $f(\alpha) = 0$)

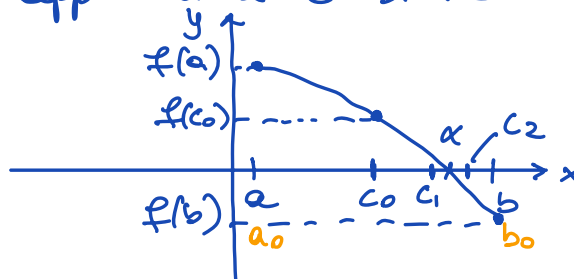


So che $\exists \alpha$, devo calcolarlo

Bisezione costruisce una ncc di intervalli:

$I_0 = [a, b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$ tutti contenenti α
 e la ncc dei corrispondenti punti medi $\{c_k\}_{k \geq 0}$

e c_k sono presi come apprx di α e si ha che
 $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \alpha$.



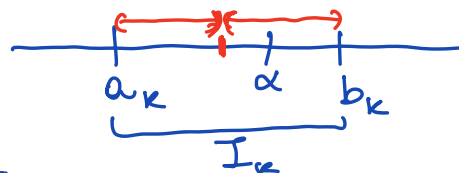
$a_0 = a, b_0 = b, I_0 = [a_0, b_0], c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
 valuto $f(c_0)$
 calcolo $f(c_0) \cdot f(a)$
 se $f(c_0) \cdot f(a) < 0 \Rightarrow I_1 = [a_0, c_0] = [a_1, b_1]$
 altrimenti se $f(c_0) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow I_1 = [c_0, b_0] = [a_1, b_1]$
 altrimenti se $f(c_0) = 0$
 $\alpha = c_0$, stop
 calcolo $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ e poi procedo, ripetendo il ragionamento

Test d'arresto per fermare le iterazioni

- 1) dare input k_{max} e iterare intanto che $k \leq k_{max}$
- 2) dare in input una tolleranza ϵ e iterare intanto che $|c_k - \alpha| \geq \epsilon$
 errore che commetterei prendendo c_k come appx di α , ma α è incognita
 so sostituirlo $|c_k - \alpha|$ con un suo **stimatore**

$$|c_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$$

stimatore



test vero : iterare intanto che

$$\frac{b_k - a_k}{2} \geq \epsilon$$

non salvo tutti gli a_k, b_k, c_k , ma solo gli ultimi e tengo un contatore di iterazioni.

ALGORITMO DI BISEZIONE

Input : $f, a, b, \text{tol}(\epsilon), k_{\max}$

Output : $\text{zero} (\approx \alpha)$, K (iter svolte), residuo ($= |f(\text{zero})|$)

```
if  $f(a) \cdot f(b) > 0$ 
    zero = [ ]; k = [ ]; residuo = [ ];
    warning('attenzione il metodo non può funzionare')
    return
```

```
elseif  $f(a) = 0$ 
```

```
    zero = a ; k = 0 ; residuo = f(zero) ; return
```

```
elseif  $f(b) = 0$ 
```

```
    zero = b ; k = 0 ; residuo = f(zero) ; return
```

```
end
```

```
%  $f(a) \cdot f(b) < 0$ 
```

```
k = 0 ; residuo = [ ]; zero = [ ];
```

```
err = (b-a)/2 ; c = (a+b)/2 ;
```

```
while  $k \leq k_{\max}$  &  $\text{err} \geq \text{tol}$ 
```

```
    k = k+1 ;
```

```
    if  $f(a) \cdot f(c) < 0$  % intervallo di sx
```

```
        a = a b = c ; ( $b_{k+1} = c_k$ )
```

```
        c = (a+b)/2 ;
```

```
        err = (b-a)/2 ;
```

```
    elseif  $f(b) \cdot f(c) < 0$ 
```

```
        a = c ( $b = b$ )
```

```
        c = (a+b)/2 ;
```

```
        err = (b-a)/2 ;
```

```
    else % c =  $\alpha$ 
```

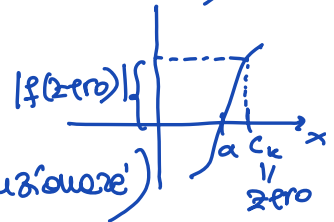
```
        err = 0 ; k = k-1 ;
```

```
    end
```

```
end
```

```
zero = c
```

```
residuo = f(zero)
```



? Riesco a prevedere quante iterazioni servono per garantire errore $|c_k - \alpha| < \varepsilon$? sì

stimatore $err_k = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{1}{2} \frac{(b_{k-1} - a_{k-1})}{2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$

stimatore $err_k = \frac{b-a}{2^{k+1}}$

se chiedo $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow |c_k - \alpha| \leq \varepsilon$

ε è dato, a, b sono noti

$|c_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$

$\Rightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^{k+1} \quad \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) \leq \log_2 2^{k+1}$

$\left\| k \geq \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) - 1 \right\|$ non dipende da f

n° iterazioni che garantiscono a inizio di produrre una appx di α con errore $\leq \varepsilon$

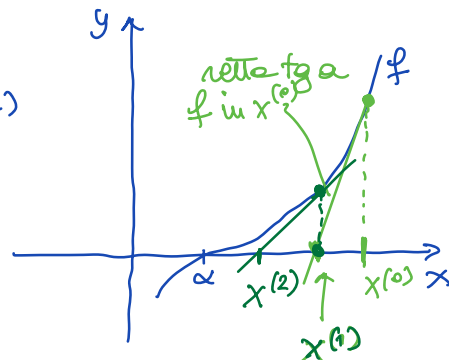
Metodo di Newton

1/10/24

Date $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continua e derivabile su I e t.c. $\exists \alpha \in I : f(\alpha) = 0$

Voglio costruire una nuce $x^{(k)}$ con $k \geq 0$:

$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$



$\{x^{(k)}\}$ è costruita ricorrendo a partire da $x^{(0)}$ dato

1 - costruisco la retta tg a f in $x^{(0)}$:

$$t_0(x) = f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

2 - definisco $x^{(1)}$ come la radice di $t_0(x) = 0$

$$f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}) = 0$$

isolando x

$$\rightarrow x^{(1)} = x = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

ora ripeto con $x^{(1)}$ al posto di $x^{(0)}$

e trovo: $t_1(x) = f'(x^{(1)})(x - x^{(1)}) + f(x^{(1)})$

e poi isolando x

$$\rightarrow x^{(2)} = x = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

METODO
di
NEWTON

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dato } x^{(0)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0 \end{array} \right.$$

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)}$$

1) scelta di $x^{(0)}$?

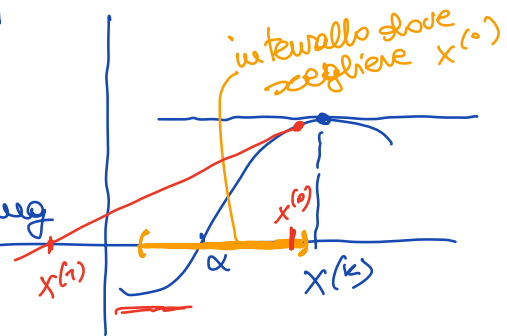
2) $x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha$? con quale velocità

3) come fermare le iterazioni

(1) Scelta di $x^{(0)}$, deve avere

- $f'(x^{(k)}) \neq 0 \quad \forall x^{(k)}$ per evitare overflow

- se $f'(x^{(k)}) = 0 \Rightarrow$ la
necessaria si interrompe
perché $\nexists$ intersezione tra la tang
 t_k e l'asse delle ascisse
 $\Rightarrow \nexists x^{(k+1)}$



Scelgo $I_f(\alpha) : \forall x \in I_f(\alpha)$ si abbia $f'(x) \neq 0$

In realtà basta che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_f(\alpha) - \{\alpha\}$, cioè
in α può avere f' nulla.

Prendo $x^{(0)} \in I_f(\alpha)$, $I_f(\alpha)$ dipende da f .

A volte si deve aggiungere un'ulteriore richiesta:

dovrò scegliere $x^{(0)}$ suff. vicino ad α in
modo da evitare che $x^{(1)}$ cada troppo
lontano da α e in zone in cui $f'(x) = 0$.

(2) convergenza

Def Sia $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ una succ. t.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$

Diciamo che $x^{(k)}$ converge con ordine p ad α
se $\exists C > 0$ e $p \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$(*) \quad \underbrace{|x^{(k+1)} - \alpha|}_{\text{errore al passo } k+1} \leq C |x^{(k)} - \alpha|^p \quad \forall k \geq \bar{k} \geq 0$$

cioè l'errore al passo $k+1$ è maggiorato da
una potenza dell'errore al passo k

$|x^{(k+1)} - \alpha|$ = errore al passo $k+1$

$x^{(k+1)}$ = appx di α se fornissi la succ all'indice $k+1$

Se $p=1$, (*) diventa $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C |x^{(k)} - \alpha|$

di cui che l'ordine di convergenza è 1
o che la conv. è lineare

$$x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha \iff |x^{(k)} - \alpha| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

a patto che $C \in (0, 1)$

Se $p=2$, (*) $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C |x^{(k)} - \alpha|^2$

convergenza quadratica

non appena $|x^{(k)} - \alpha| < 1$, l'errore continua
a decrescere $\forall C > 0$

ES: $C = \frac{1}{2}$ e parto da $|x^{(0)} - \alpha| = 10^{-1}$

k

metodo $p=1$

metodo $p=2$

$$1 \quad |x^{(1)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x^{(0)} - \alpha| = \frac{1}{2} 10^{-1}$$

$$|x^{(1)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x^{(0)} - \alpha|^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

$$2 \quad |x^{(2)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x^{(1)} - \alpha| = \frac{1}{4} \cdot 10^{-1}$$

$$|x^{(2)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x^{(1)} - \alpha|^2 = \frac{1}{8} \cdot 10^{-4}$$

$$3 \quad |x^{(3)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x^{(2)} - \alpha| = \frac{1}{8} \cdot 10^{-1}$$

$$|x^{(3)} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x^{(2)} - \alpha|^2 = \frac{1}{128} \cdot 10^{-8}$$

un ordine è l'ordine di conv di un metodo
e + veloce è la conv alla radice

$\Rightarrow$ se fisso una tolleranza ε di accettabilità
della sol. appx, cioè mi fermo quando
 $|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$,

un metodo di ordine + elevato si ferma prima, cioè richiede meno iterazioni.

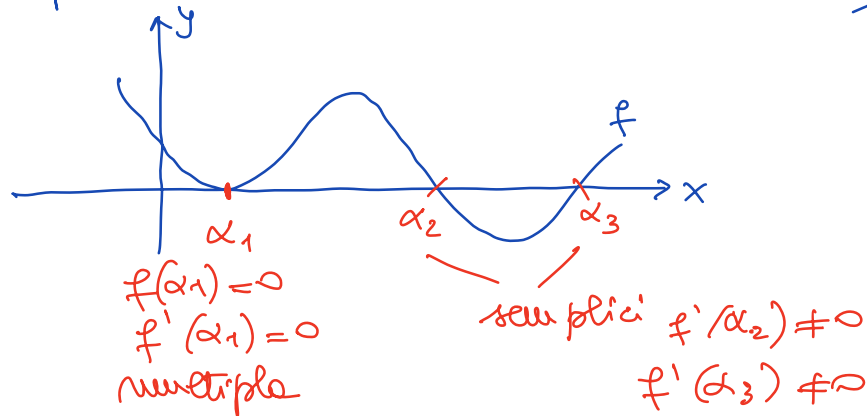
Def Una radice α di $f(x)=0$ è

SEMPLICE se $f(\alpha)=0$ e $f'(\alpha) \neq 0$,

MULTIPLA con molteplicità m se

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ e } f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

(a patto che f sia derivabile m volte)



Torniamo a Newton

Teorema (di conv del metodo di Newton)

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f \in C^1(I)$ (continua, derivabile, con derivata continua)
Sia α radice f , cioè $f(\alpha)=0$

e $\exists J(\alpha) \subset I: f'(x) \neq 0 \forall x \in J(\alpha) \setminus \{\alpha\}$

Sia $x^{(0)} \in J(\alpha)$ ^{e suff. vicino ad α} , allora la suce $\{x^{(k)}\}_{k=0}$ generata dal metodo di Newton converge ad α .

Inoltre se $f \in C^2(J(\alpha))$ (f è cont, f' è cont, f'' è cont)
allora Newton converge:

($p=2$) quadraticamente ad α se α è semplice

(p=1) linearmente ad α se α è semplice.

Variante del metodo di Newton :

se conosco m (multiplicità di α), allora posso modificare il metodo con:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - m \cdot \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

e recuperare l'ordine 2 di conv. anche per radici multiple.

③ test d'arresto

$$\text{err}_k = |x^{(k)} - \alpha|, \quad \text{data tolleranza } \varepsilon$$

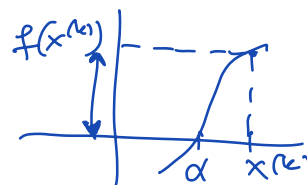
vorrei fermarmi quando $|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$

Stimatori dell'errore

↑
una c'è sotto

1) stimatore = incremento $|x^{(k)} - x^{(k+1)}|$

2) stimatore = residuo dell'eq $f(x)=0$
cioè $|f(x^{(k)})| = \text{residuo}_k$



① stimatore = incremento

noi fermi quando $|x^{(k)} - x^{(k+1)}| < \varepsilon$.

Mi chiedo: $|x^{(k)} - x^{(k+1)}| < \varepsilon \Rightarrow |x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$?

Sì, vediamo perché

Parto da $x^{(k)} - x^{(k+1)} = \pm \varepsilon$

$$= (x^{(k)} - \alpha) - (x^{(k+1)} - \alpha) \quad (*)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = \varphi_N(x^{(k)})$$

dove $\varphi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

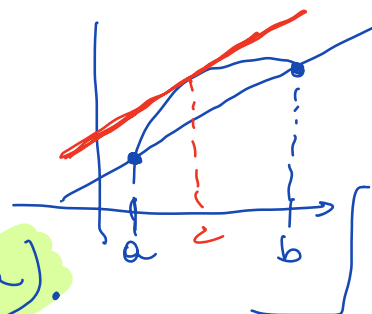
Se $f \in C^2(J(\alpha))$
 $\Rightarrow \varphi_N \in C^1(J(\alpha))$
 $\varphi_N'(\alpha) = \alpha - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$

THM di LAGRANGE: sia φ_N continua su $[a, b]$ e deriv su (a, b) , allora $\exists c \in (a, b)$:

$$\varphi_N'(c) = \frac{\varphi_N(b) - \varphi_N(a)}{b - a}$$

$\Downarrow$

$$\varphi_N(b) - \varphi_N(a) = \varphi_N'(c)(b - a)$$



riprendo $(x^{(k+1)} - \alpha) = \varphi_N(x^{(k)}) - \varphi_N(\alpha) =$
 $\varphi_N'(c^{(k)}) \cdot (x^{(k)} - \alpha)$

$$(*) \Rightarrow (x^{(k)} - \alpha) - \varphi_N'(c^{(k)}) (x^{(k)} - \alpha) =$$

$$= (x^{(k)} - \alpha) \cdot (1 - \varphi_N'(c^{(k)})) \stackrel{\text{dall'intro}}{=} x^{(k)} - x^{(k+1)}$$

se ~ 1
 $\Rightarrow (x^{(k)} - \alpha) \sim (x^{(k)} - x^{(k+1)})$

riprendendo $\varphi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \varphi_N'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

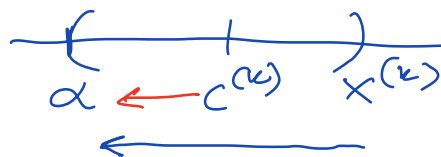
e $\varphi_N'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$.

Ora dimostriamo che $\varphi_N'(c^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

So che $x^{(k)} \rightarrow \alpha$, poiché $c^{(k)}$ è tra $x^{(k)}$ e α ,
 $\Rightarrow$ anche $c^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$.

Poiché $\varphi_N \in C^1 \Rightarrow \varphi_N'$ è continua

e $\varphi_N'(c^{(k)}) \rightarrow \varphi_N'(\alpha) = 0$.



Segue che

$$1 - \varphi_N'(c^{(k)}) \rightarrow 1 \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

cioè, quando $x^{(k)}$ è vicino ad α , si ha

$$(1 - \varphi_N'(c^{(k)})) \sim 1$$



$$\underbrace{(x^{(k)} - \alpha)}_{\text{errore}} \sim \underbrace{(x^{(k)} - x^{(k+1)})}_{\text{stimatore}}$$

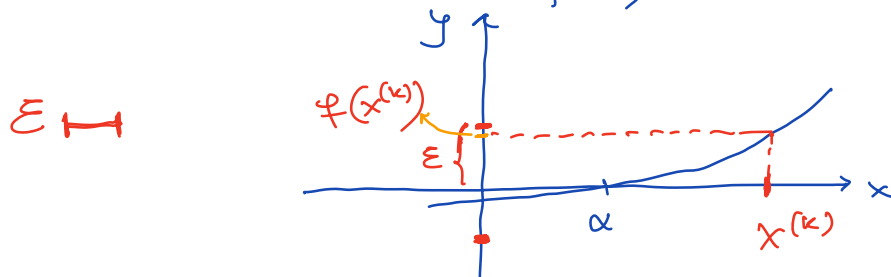
lo stimatore dell'errore basato sull'ultima

è ottimo per Newton -

② stimatore = residuo. Fermo le iterazioni quando $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$.

Test buono e fatto che $|f'(\alpha)| \sim 1$.

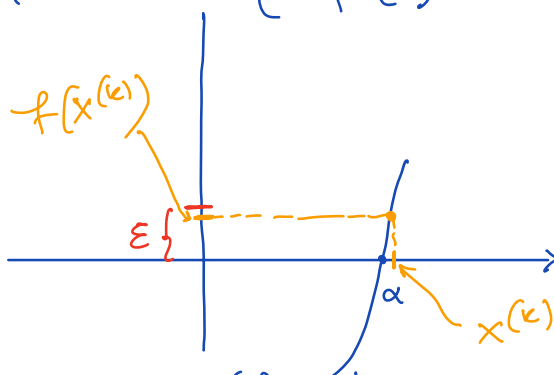
Considero il caso $0 < f'(\alpha) < 1$



$$|f(x^{(k)})| < \varepsilon, \text{ ma } |x^{(k)} - \alpha| \gg \varepsilon$$

qui fermo, ma la sol $x^{(k)}$ è ben lontano da α
lo stimatore non è buono

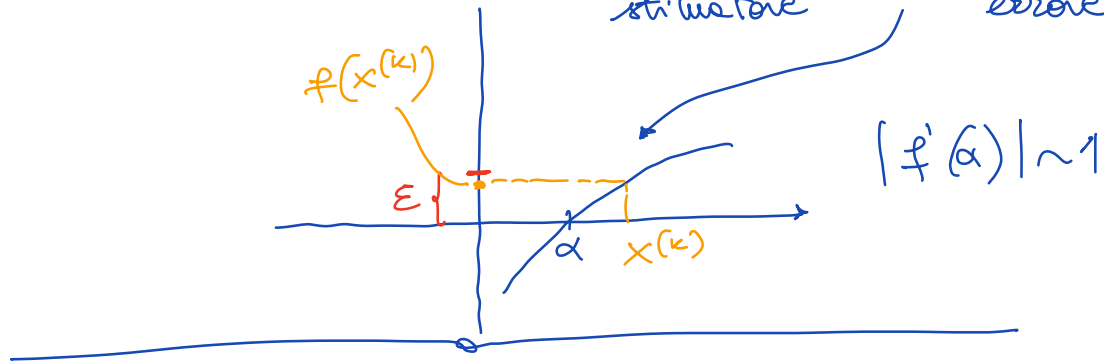
Caso $|f'(\alpha)| \gg 1$ (pseudo $f'(\alpha) > 0$ nel disegno)



$$|f(x^{(k)})| < \varepsilon \text{ e } |x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$$

cioè ho lavorato più del necessario -

Situazione ideale : $|f(x^{(k)})| \sim |x^{(k)} - \alpha|$
stimatore errore



Algoritmo del metodo di Newton

Input: $f, f1 (= f')$, $x0$, $tol (\epsilon)$, $kmax$ (n° max iter)

Output: $zero (\sim \alpha)$, k (n° iter svolte), $res (f(zero))$
residuo

$k = 0$; $err = tol + 1$ (stimatore)

while $k < kmax$ & $err \geq tol$

$x_{new} = x0 - f(x0) / f1(x0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$k = k + 1$

$err = abs(x_{new} - x0)$ (incremento)

$x0 = x_{new}$

end

$zero = x_{new}$

$res = f(zero)$

Aspetto negativo di Newton: disporre di f'

A volte f è noto solo per punti, cioè sono in grado di valutare $f(x^{(k)})$ (= output di un progr.)

ma non conosco l'espressione analitica $\Rightarrow$ non

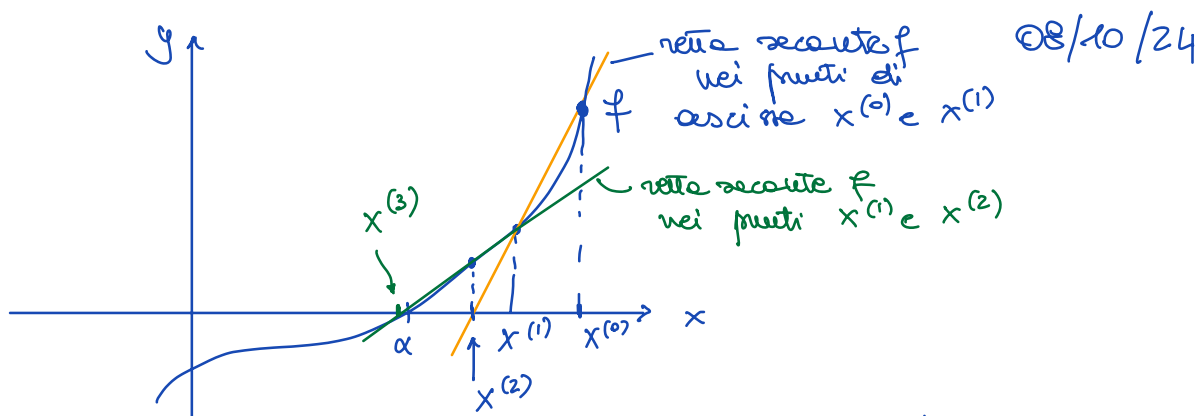
so calcolare $f'(x)$.

Soluzione : appx $f'(x^{(k)})$ con un rapporto incrementale,

es: $f'(x^{(k)})$ è sostituito da $\frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$

⇒ Metodo delle secanti

$$\begin{cases} x^{(0)}, x^{(1)} \text{ dati} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}}, \quad k \geq 1 \end{cases}$$



la retta $s_1(x)$ secante f nei punti $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ ha

$$\text{eqa : } s_1(x) = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}} (x - x^{(1)}) + f(x^{(1)})$$

$$x^{(2)} = x = \text{radice di } s_1(x)$$

Teorema (delle secanti)

Sia $f \in C^1(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, $\exists \alpha \in I: f(\alpha) = 0$,
 $\exists J(\alpha): f'(x) \neq 0 \forall x \in J(\alpha) \setminus \{\alpha\}$.

Se $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ sono scelti suff. vicini ad α , allora
la successione $\{x^{(k)}\}$ costruita con secanti converge ad α
per $k \rightarrow \infty$.

Se inoltre $f \in C^2(I)$, allora:
se α è radice semplice, secanti converge con ordine
 $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62$,

se α è radice moltiplice, secanti converge con ordine 1

Sia Newton che secanti sono detti metodi
a convergenza locale

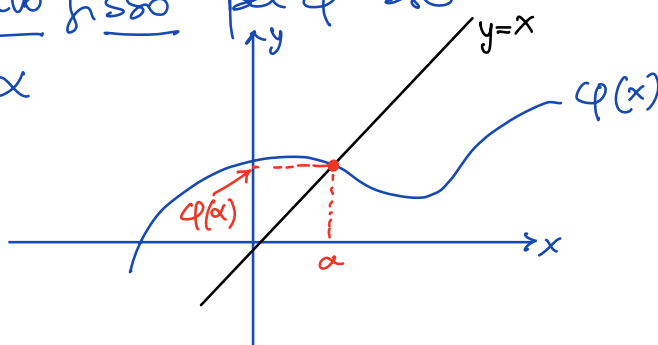
(i dati iniziali devono essere localizzati, vicini
alla radice).

METODI DI PUNTO FISSO

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non lineare, diciamo che

$\alpha \in \text{dom}(\varphi)$ è punto fisso per φ se

$$\varphi(\alpha) = \alpha$$



Metodi di pf cercano i punti fissi di funzioni
e non le loro radici, quindi risolvono

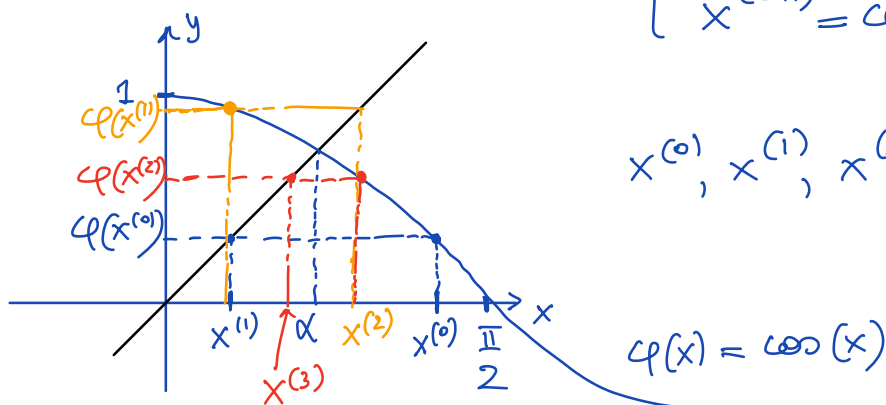
$$\boxed{? x : \varphi(x) = x}$$

Se definisco $f(x) = \varphi(x) - x$ $\parallel$

$$\varphi(x) = x \iff f(x) = 0$$

Dato f , posso costruire φ in vari modi -

Metodo di punto fisso : $\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad k \geq 0 \end{cases}$



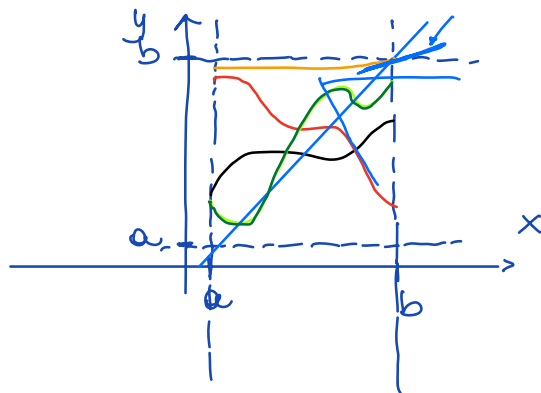
$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots \rightarrow \alpha$$

È sempre vero che $x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha$?

Se sì, con quale velocità? (Fissato ϵ tolleranza ϵ
quante iterazioni
servono per garantire
 $|x^{(k)} - \alpha| < \epsilon$?)

Teorema 1 : Sia $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua.

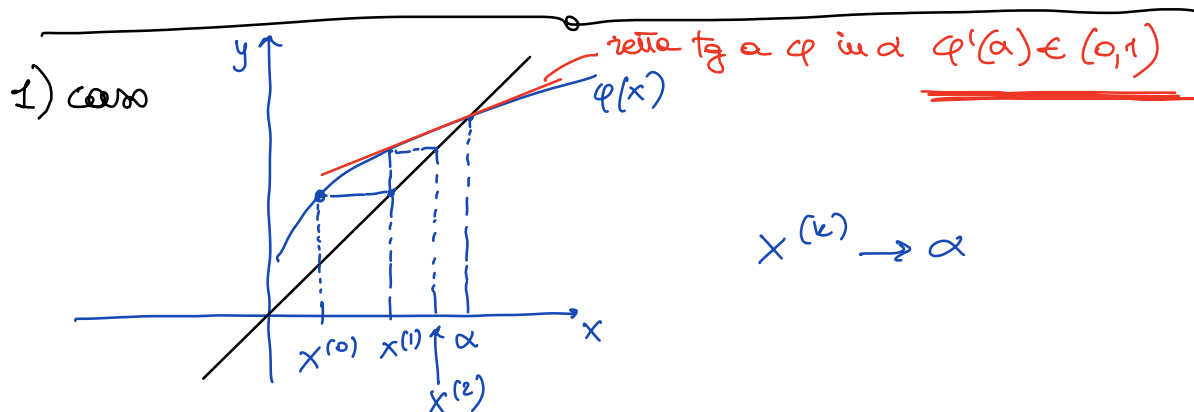
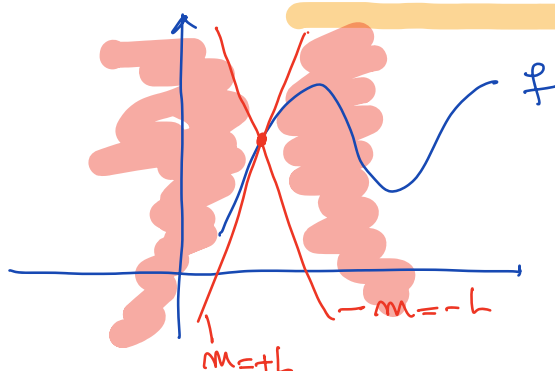
1 - Allora $\exists$ almeno un pto fisso di φ in $[a, b]$



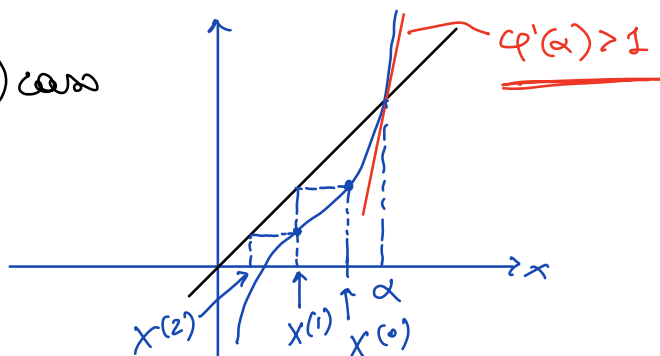
2 - Se φ è Lipschitziana con costante $0 < L < 1 \Rightarrow$
 il punto fisso $\exists!$ in $[a, b]$ e la succ
 $x^{(k)}$ generata con il metodo di pto fisso
 converge ad α per $k \rightarrow +\infty$.

Def f è lips su $[a, b]$ se $\exists L > 0$:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \text{ si ha } |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

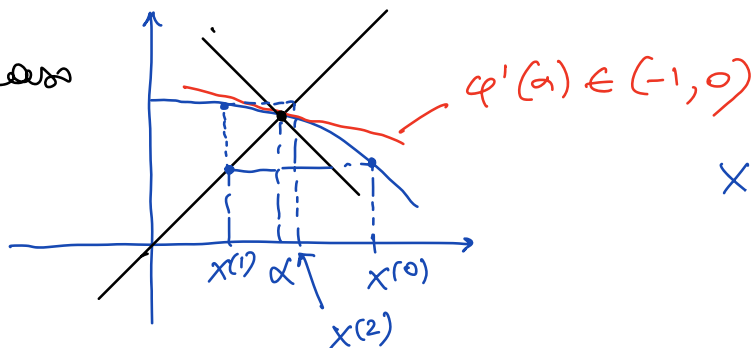


2) caso



$$x^{(k)} \not\rightarrow \alpha$$

3) caso



$$x^{(k)} \rightarrow \alpha$$

4) caso

$$\phi'(\alpha) < -1$$

$$x^{(k)} \not\rightarrow \alpha$$

teorema di OSTROWSKI

Sia $\phi \in C^1(I)$ e $\exists \alpha \in I : \phi(\alpha) = \alpha$

Se $|\phi'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \exists I_\delta(\alpha) : \forall x^{(0)} \in I_\delta(\alpha)$

la succ $x^{(k)}$ (costruite col metodo di pts fissi)
converge ad α per $k \rightarrow \infty$.

Inoltre

Se $\phi'(\alpha) \neq 0$, allora la convergenza è lineare
($|\phi'(\alpha)| < 1$)

Se $\phi'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ la convergenza è almeno
di ordine 2.

Oss : se $q'(\alpha) \neq 0$, minore è $|q'(\alpha)|$ e più veloce sarà la convergenza, cioè $|q'(\alpha)|$ è un indicatore della c che interviene nelle def di conv : $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq c |x^{(k)} - \alpha|^{p \approx 1}$

$c = 0.99$ convergenza lenta
 $c = 0.01$ convergenza + veloce

Algoritmo di punto fisso

Input : q, x_0, tol, k_{max}

Output : α (appx pto fisso), k (n° iter)

$k = 0$ (contatore iter)

$err = tol + 1$ (stima dell'err)

while $err \geq tol$ & $k < k_{max}$

$x_{new} = q(x_0)$

$k = k + 1$

$err = abs(x_{new} - x_0)$

$x_0 = x_{new}$

end

$\alpha = x_{new}$

Test d'arresto per metodo di pf è quello sull'incremento $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon$

in Newton era $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Newton può essere visto come metodo di punto fisso con

$$q_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$