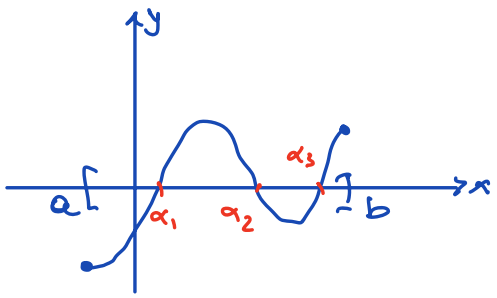
Equazioni e sistemi di eqz non lineari

	eqz	sistemi
Metodo di bisezione	V	X
Metodo di Newton	V	V
Metodo delle secanti	V	~
Metodi di punto fisso	V	V

Problema : $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, t.c. $\exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = 0$

(α è detta radice o zero di f)



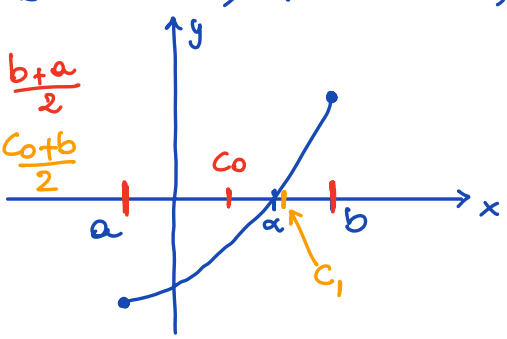
Obiettivo : calcolare numericamente le radici

Metodo di bisezione

Sia $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$ || Ip necessarie per usare il metod di bisez

$I_0 = [a,b]$, $c_0 = \frac{b+a}{2}$

$I_1 = [c_0, b]$, $c_1 = \frac{c_0+b}{2}$



se $f(a) \cdot f(c_0) < 0$
$I_1 = [a, c_0]$
altrimenti se $f(c_0) \cdot f(b) < 0$
$I_1 = [c_0, b]$
altrimenti
$\alpha = c_0$

Il metodo costruisce una succ di intervalli I_k dove
$I_0 = [a,b]$
$I_1 \subset I_0$, $I_2 \subset I_1$, ... $I_{k+1} \subset I_k$ con la propr che $\alpha \in I_k$
e una successione di punti c_k = punto medio di I_k -

per $k \to \infty$, $c_k \to \alpha$ $\equiv \lim_{k\to\infty} c_k = \alpha$

Algoritmo per passare da I_k a I_{k+1}

$I_k = [a_k, b_k]$ noto

calcolo $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$



if $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$

$a_{k+1} = a_k$

$b_{k+1} = c_k$

$c_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

elseif $f(c_k) \cdot f(b_k) < 0$

$a_{k+1} = c_k$

$b_{k+1} = b_k$

$c_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

else

$\alpha = c_k$ (siamo arrivati alla radice)

Test d'arresto

A ogni iterazione k, c_k è un'appx di α

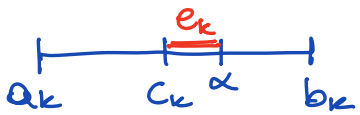
Stabilisco ε = soglia di errore accettabile (10^{-3}, 10^{-8}, 10^{-12}, ...)

mi fermo quando $|c_k - \alpha| < \varepsilon$

$e_k = |c_k - \alpha|$ errore — α è incognito

che commetterei se accettassi c_k come appx di α

Utile ~~zzo~~ uno stimatore dell'errore



$\underbrace{|c_k - \alpha|}_{\text{errore}} \leq \underbrace{\frac{b_k - a_k}{2}}_{\text{stimatore dell'errore}}$

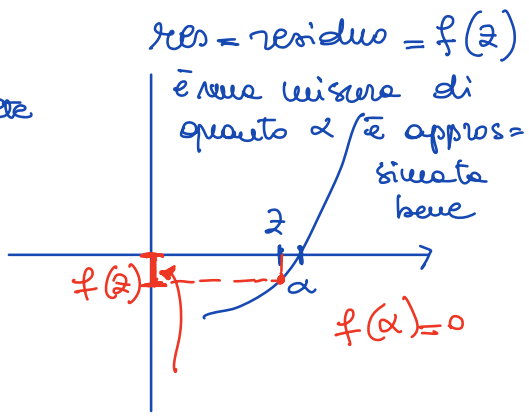
Mi fermerò quando $\frac{b_k - a_k}{2} < \varepsilon$ ← tolleranza

28/09/26

Algoritmo di bisezione

Input : $f, a, b, tol, kmax$ (ε)

Output : z (appx di α), k (n° di iterazioni svolte), res



$c = \frac{a+b}{2}$

$k = 0$

$err = \frac{b-a}{2}$

obiettivo: avere $|res|$ più piccolo poss.

while $k < kmax$ & $err \geq tol$

  if $f(a) \cdot f(c) < 0$

    ~~$a = a$~~

    $b = c$

    $c = \frac{a+b}{2}$

    $k = k+1$

    $err = \frac{b-a}{2}$

  elseif $f(b) \cdot f(c) < 0$

    $a = c$

    ~~$b = b$~~

    $c = \frac{a+b}{2}$

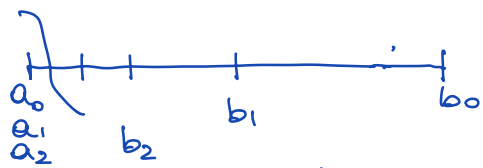
    $k = k+1$



```
        err = (b-a)/2
    else
        err = 0
    end
end
z = c
res = f(z)
```

Se fisso una tolleranza ε per il test d'arresto il metodi si ferma quando

$$\frac{b_k - a_k}{2} < \varepsilon$$



$$\frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2 \cdot 2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dots\dots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$$

Quante iterazioni servono per garantire $\frac{b_k - a_k}{2} < \varepsilon$?

$$\frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

isolo k

$$\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{k+1}$$

$$\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < \log_2 2^{k+1} = k+1$$

$$\Rightarrow \quad k > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$$

se $b-a = 2$, $\varepsilon = 10^{-8}$

$$k > \log_2\left(\frac{2}{10^{-8}}\right) - 1 = 27.575 - 1 = 26.575$$

$\Rightarrow$ con 27 iterazioni trovo un'approx di α con errore al + di 10^{-8}

$k_{min} = \left[\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right]$ è il + piccolo intero maggiore di $\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1$

Metodo di Newton

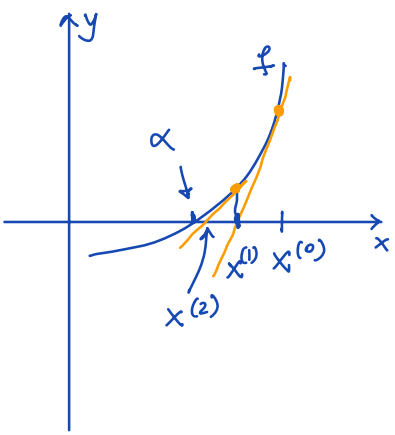
$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I intervallo), $f \in C^1(I)$ (cont con derivata prima cont)

so che $\alpha \in I$ è radice di $f(x)=0$, cioè $f(\alpha)=0$

Metodo di Newton: $\{x^{(k)}, k \geq 0\}$: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$

- preso $x^{(0)}$, costruisco la retta tg a f in $x^{(0)}$

$$\begin{cases} y = f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)}) \\ y = 0 \end{cases}$$



$$0 = f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

$$-\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = \frac{f'(x^{(0)})(x - x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

$$x^{(1)} = x = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

Metodo di Newton

$$\begin{cases} \text{dato } x^{(0)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases} \qquad \text{per } k \geq 0$$

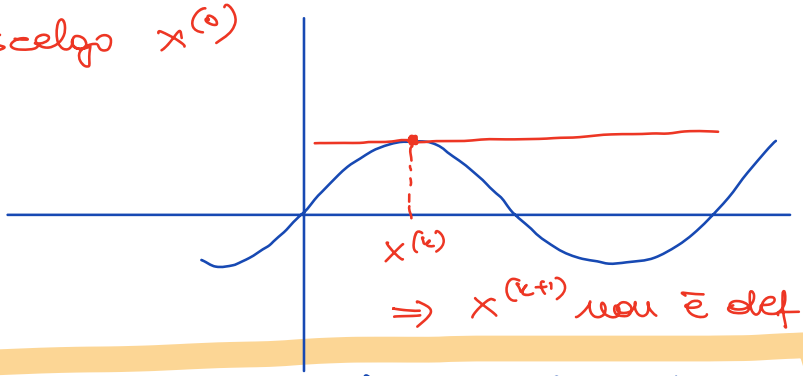
1) come scelgo $x^{(0)}$

2) $x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha$? è sempre vero ? con quale velocità ?

3) come fermo le iterazioni ?

---

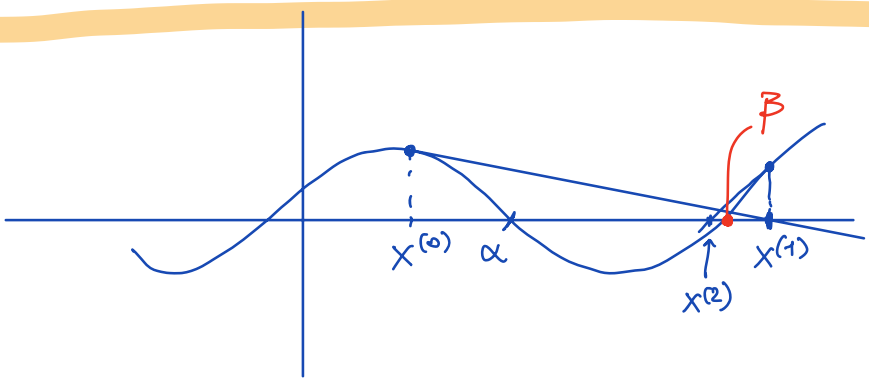
1) come scelgo $x^{(0)}$



$\Rightarrow x^{(k+1)}$ non è def

devo garantire che $x^{(0)} \in I(\alpha) : f'(x) \neq 0$

$\forall\, x \in I(\alpha) \setminus \{\alpha\}$



devo scegliere $x^{(0)}$ sufficientemente vicino ad α

2) $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$? è sempre vero ? con quale velocità ?

Convergenza del metodo di Newton

Def Sia $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ una succ che converge ad α

Diciamo che la succ $\{x^{(k)}\}$ converge con ordine $p\ (\in \mathbb{R}^+)$

se $\exists\, C>0$:

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C\,|x^{(k)} - \alpha|^p \quad \forall\, k \geq k_0 \geq 0$$

$|x^{(k)} - \alpha|$ = errore che commettiamo se accettiamo $x^{(k)}$ come approx di α.

Es: $x^{(k)} \to \alpha$ $\quad p=1$

$x^{(0)}$: $|x^{(0)} - \alpha| \sim \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$C = \frac{1}{2}$

$$|x^{(1)} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|x^{(0)} - \alpha| \sim \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$|x^{(2)} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}\right) \sim \frac{1}{4}\cdot 10^{-1}$$

$z^{(k)} \to \alpha \quad p = 2$

$z^{(0)}$: $|z^{(0)} - \alpha| \sim 10^{-1}$

$C = \frac{1}{2}$

$$|z^{(1)} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\cdot |z^{(0)} - \alpha|^2 \sim \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$$

$$|z^{(2)} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|z^{(1)} - \alpha|^2 \sim \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}\right)^2 \sim \frac{1}{8}\cdot 10^{-4}$$

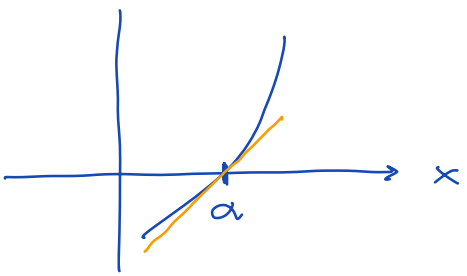
Metodi che hanno ordine di conv + alto sono quelli che convergono + velocemente, cioè richiedono meno iterazioni, cioè contano meno

---

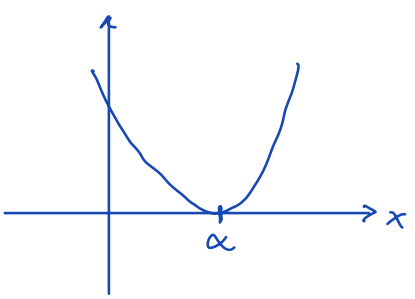
Se un metodo converge con ordine 1 ⇒ si dice che converge linearmente,
un metodo che converge con ordine 2 si dice che converge quadraticamente

---

Def α è una radice semplice per f se $f(\alpha)=0$ e $f'(\alpha)\neq 0$.



α è una radice multipla con molteplicità $m>1$ se $f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$ e $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$



$f(\alpha)=0$
$f'(\alpha)=0$
$f''(\alpha)>0$

$m=2$

Teorema (convergenza di Newton):

- Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$ (I: intervallo)
- Sia $\alpha \in I$: $f(\alpha)=0$ ed $\exists\, I(\alpha)$: $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I(\alpha) \setminus \{\alpha\}$
- Sia $x^{(0)} \in I(\alpha)$ sufficientemente vicino ad α.

Allora la succ $x^{(k)}$ generata col metodo di Newton converge ad α per $k \to \infty$.

Se inoltre $f \in C^2(I)$, allora:

- il metodo di Newton converge con ordine 2 se α è radice semplice
- il metodo di Newton converge con ordine 1 se α è radice multipla.

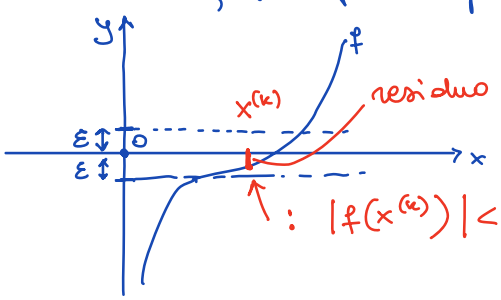
---

3) Test d'arresto

$|x^{(k)} - \alpha|$
errore al passo k

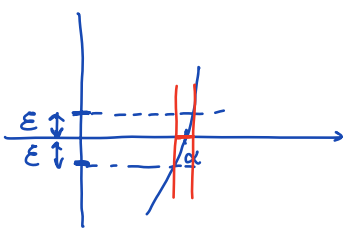
vorrei fermare le iterazioni quando
$|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$
↑ è incognita

test 1 sul residuo, mi fermo quando $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$



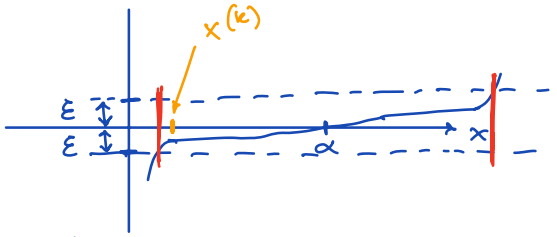
- caso estremo in cui $|f'(\alpha)| \gg 1$

per garantire $|f(x^{(k)})| < \varepsilon \to |x^{(k)} - \alpha| \ll \varepsilon$



lavoro + di quanto realmente serve

- caso estremo in cui $|f'(\alpha)| << 1$



$|f(x^{(k)})| < \varepsilon$ può comportare $|x^{(k)} - \alpha| >> \varepsilon$

qui il test è poco significativo

- questo test è buono solo se $|f'(\alpha)| \sim 1$

test 2 sull'incremento

misuro $|x^{(k)} - x^{(k-1)}|$ = incremento

mi fermo quando $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon$

Si dimostra (thm di Lagrange) che se $f \in C^2$

$$\Rightarrow |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \sim |x^{(k-1)} - \alpha|$$

cioè l'incremento ↑ è un ottimo stimatore dell'errore per il metodo di Newton

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases} \quad k \geq 0$$

Algoritmo

Input: $f, f', x^{(0)}, \varepsilon$ (x0), tol, kmax

Output: z, k, res

z ↑ appx di α ; k ↖ n° iterate svolte

```
k = 0
err = tol + 1
while k < kmax & err >= tol
```

$xnew = x\phi - f(x\phi)/f'(x\phi)$

$err = |xnew - x\phi|$

$k = k+1$

$x\phi = xnew$

end

$z = x\phi$

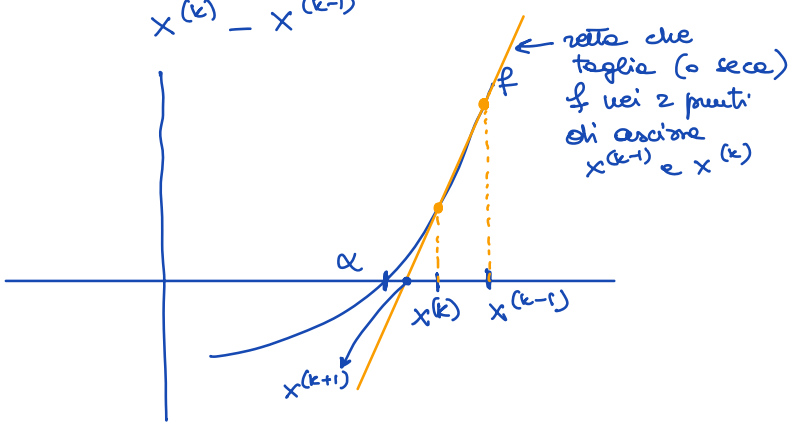
$res = f(z)$

Metodo delle secanti $\qquad x \longmapsto \boxed{f} \longrightarrow f(x)$

Posso valutare $f(x)$, ma non conosco l'espressione matem. di f $\Rightarrow$ non ho f' e non posso applicare Newton

$f'(x^{(k)}) \sim$ rapporto incrementale

$$f'(x^{(k)}) \sim \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$



Metodo delle secanti

$$\begin{cases} x^{(0)}, x^{(1)} \text{ dati} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{\dfrac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}} \end{cases} \quad , \ k \geq 1$$

ho sostituito $f'(x^{(k)})$

Teorema (secanti)

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$

se $x^{(0)}$ e $x^{(1)} \in I(\alpha)$ con $I(\alpha)$: $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I(\alpha) - \{\alpha\}$

e sono sufficientemente vicini ad α,

allora il metodo delle secanti converge ad α

e, se α è semplice allora il metodo converge con ordine

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.618$$

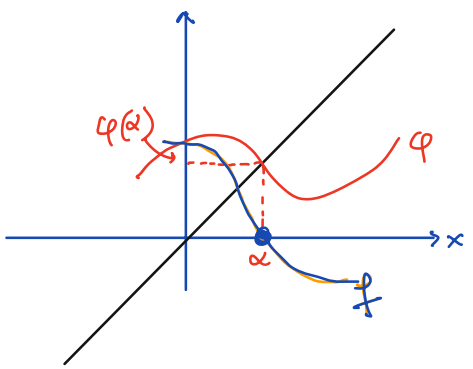
se α è multiplo, allora il metodo converge con ordine 1

05/10/26

PROBLEMI DI PUNTO FISSO

Sia $\varphi : \mathrm{dom}(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che $\alpha \in \mathrm{dom}(\varphi)$ è PUNTO FISSO per φ se

$$\varphi(\alpha) = \alpha .$$



Se definisco $f(x) = \varphi(x) - x$

risolvere $\varphi(x) = x$

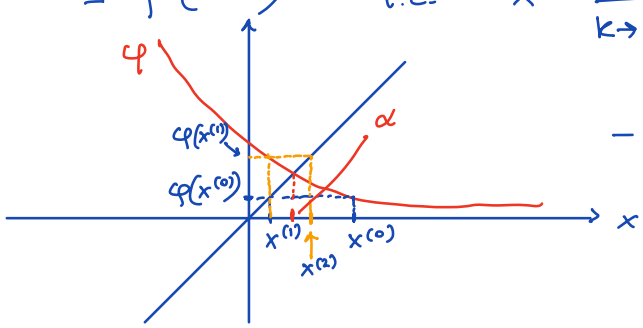
equivale a risolvere $f(x) = 0$

1 - per calcolare un p.f. di φ, posso costruire $f(x) = \varphi(x) - x$ e applicare i metodi finora visti a f

2 - cercare direttamente α con metodi di punto fisso

φ è nota, scelgo $x^{(0)}$, costruisco una successione $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$

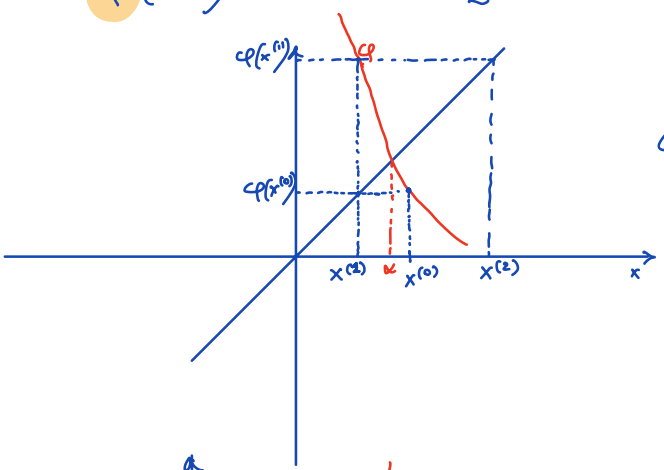
$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad \text{t.c.} \quad x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha$$



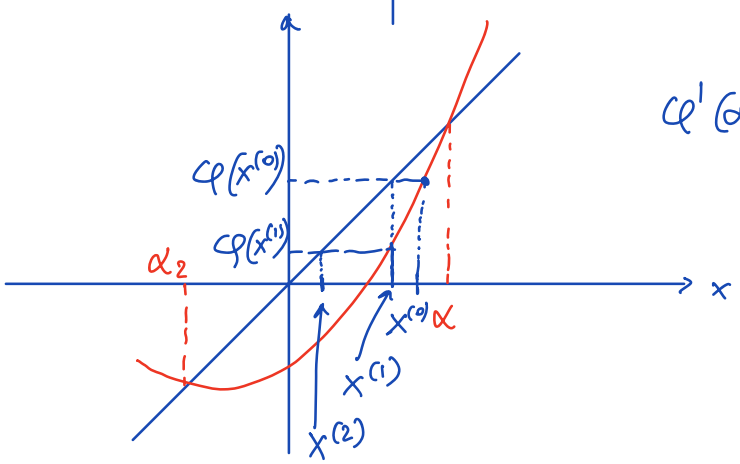
$$-1 < \varphi'(\alpha) < 0$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \end{cases} \quad k \geq 0$$

Metodo di punto fisso



$\varphi'(\alpha) < -1$



$\varphi'(\alpha) > 1$

Teorema di Ostrowski

Sia $\varphi : C^1(I)$ (I intervallo in $\mathbb{R}$) e sia $\alpha \in I$ il punto fisso φ.

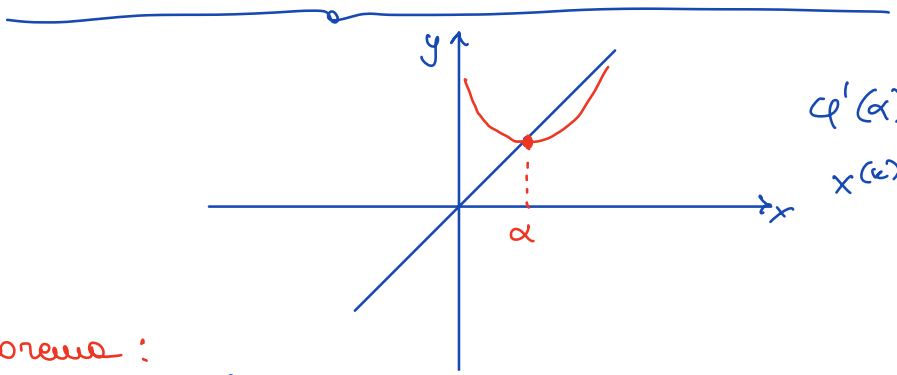
Se $|\varphi'(\alpha)| < 1$ $\left(-1 < \varphi'(\alpha) < 1\right)$ allora

$\exists\, I_\delta(\alpha) : \forall\, x^{(0)} \in I_\delta(\alpha)$ la succ $x^{(k)}$ generata con la regola $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ converge ad α per $k \to +\infty$

Se inoltre $\varphi'(\alpha) \neq 0$, la succ converge con ordine 1

cioè $\exists\, C > 0 : \quad |x^{(k+1)} - \alpha| \leq C\, |x^{(k)} - \alpha| \quad \forall\, k \geq 0$

$\sim |\varphi'(\alpha)|$



$\varphi'(\alpha)=0$

$x^{(k)} \to \alpha$ $k \to \infty$

Teorema:

Se $\varphi \in C^2(I)$ e $\alpha \in I$ e $\varphi'(\alpha)=0 \Rightarrow$ la succ generata col metodo di punto fisso converge ad α con ordine 2, cioè

$\exists C>0$:

$$|x^{(k+1)}-\alpha| \le C\,|x^{(k)}-\alpha|^2 \qquad \forall k \ge 0$$

Esempio Il metodo di Newton è un metodo di pto fisso di ordine 2

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases} \quad k \ge 0$$

$\| \varphi_N(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \|$

Newton è del 2° ord se α è semplice

$\varphi_N(x^{(k)})$

se α è radice di $f \Rightarrow \alpha$ è pto fisso di φ_N

$$\varphi_N(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{0}{f'(\alpha)} = \alpha$$

voltato $\varphi_N'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$

$$\varphi_N'(\alpha) = 1 - \frac{(f'(\alpha))^2}{(f'(\alpha))^2} + \frac{f(\alpha)\,f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$$

Newton è interpretabile come metodo di p.f di ord 2.

Att.ne secanti non è interpretabile come metodo di p.f.

Test d'arresto : test sull'incremento

Algoritmo (φ, $x^{(0)}$)

Input : phi, $x\phi$, tol, kmax

Output : alpha, k

```
k = 0, err = tol + 1
while k < kmax & err >= tol
    xnew = phi(xφ)
    err = |xnew - xφ|
    k = k + 1
    xφ = xnew
end
alpha = xφ
```