

Approssimazione di eqz diff. ordinarie

Dati: $I = (t_0, T) \subset \mathbb{R}$, $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$

? $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ soluz del problema di Cauchy

$$\begin{array}{l} \text{eqz diff} \\ \text{cond. iniz.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \quad \text{pdc}$$

Teorema: Se f è continua e limitata rispetto al 1° argomento (t) ed è lipschitziana rispetto al 2° argomento uniformemente rispetto al 1° arg, cioè $\exists L > 0$:

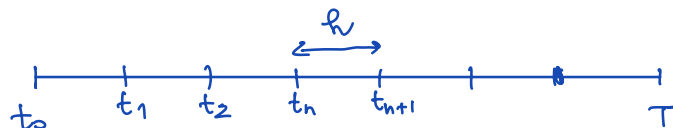
$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L |y_2 - y_1| \quad \forall y_2, y_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in I,$$

allora $\exists!$ soluzione $y(t)$ del pbl di Cauchy e $y \in C^1(I)$.

Ob: approssimare la soluzione $y(t)$ del pdc -

non cerco l'espressione di y , ma $y(t_n)$ con $t_n \in I$.

Discretizzo l'intervallo temporale $I = (t_0, T)$



Considero un passo di discretizzazione $h > 0$

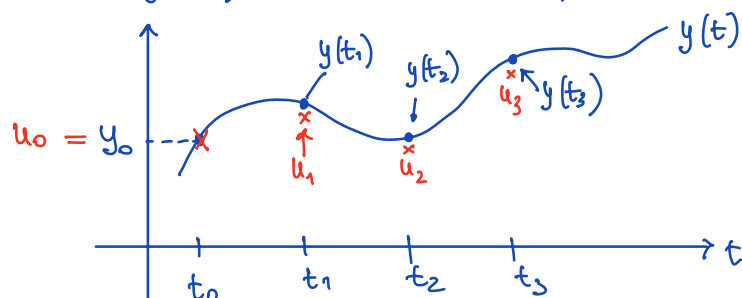
$$t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_1 + h, \dots, \quad t_n = t_0 + n h, \dots$$

$$T = t_{N_h} = t_0 + N_h \cdot h, \quad N_h \text{ è il n° totale di punti ad eccezione di } t_0 \text{ e dipende da } h$$

$= \text{n° di intervallini di ampiezza } h$

$$N_h = \frac{T - t_0}{h}$$

? appx di $y(t_n)$ per $n = 1, \dots, N_R$



cerco $u_1, u_2, \dots, u_{N_R}$ appx di
 $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_{N_R})$

$\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N_R}\} = \text{soluzione numerica}$

Partendo da $y'(t) = f(t, y(t))$, lo riscriviamo con $t = t_n$ (generico punto)

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

↑
 appx con la diff finita in avanti

$$y'(t_n) \sim \Delta_+ y(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\underbrace{t_{n+1} - t_n}_h}$$

$$\parallel y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} + \frac{y''(\xi)}{2} \cdot h$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} + \frac{y''(\xi)}{2} h = f(t_n, y(t_n))$$

non è vero che $\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n)) \quad (*)$

tengo l'eqz (*) me sostituisco $y(t_n)$ con altri valori numerici u_n che invece soddisfano l'eqz

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

isolato u_{n+1}

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Metodo di
Eulero
in avanti
(ho usato
df in avanti
per appx
 $y'(t_n)$)

conosci u_0 , calcolo $u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0)$
 $n=0$



$$n=1 \quad u_2 = u_1 + h f(t_1, u_1)$$

Utilizzo d.f. all'indietro per appx $y'(t_n)$

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})} - \frac{y''(\xi) h}{2} = f(t_n, y(t_n))$$

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = f(t_n, u_n)$$

isolato u_n

$$u_n = u_{n-1} + h f(t_n, u_n)$$

avanzo di una unit 
gli indici

Metodo di
Eulero all'indietro
 t_{n+1}

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Euler in avanti

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

metodo esplicito

es $f(t, y) = \cos(y)(t+1)$

Euler all'indietro

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

metodo implicito $\varphi(u_{n+1})$

$$u_{n+1} = u_n + h \cos(u_{n+1})(t_{n+1} + 1)$$

eqz non si riesce di
incognita u_{n+1}
(Newton, secanti, pto fisso)

Poi per $x = u_{n+1}$ $x = \varphi(x)$ eqz di punto fisso

non al tempo t_n , nota u_n devo calcolare u_{n+1}
risolvendo

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$\varphi(u_{n+1})$

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n$$

$$u_{n+1}^{(k+1)} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(k)})$$

$\varphi(u_{n+1}^{(k)})$

$$x = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

$k=0, 1, \dots$ fino a convergenza
(test d'arresto su punto fisso)

Il metodo implicito richiede che ad ogni passo t_n
sia risolto un'eqz non si riesce

Per risolvere l'eqz $u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$ con secanti

def l'eqz $r(u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n - h f(t_{n+1}, u_{n+1})$

e risolvere $r(x) = 0$ con la funzione secante.
 la funzione r cambia ad ogni passo t_n .

Metodo di Crank-Nicolson

Parto da
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

utilizzo la forma integrale

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$= y(t_{n+1}) - y(t_n)$$

$\rightarrow$ (this part of the calculation is integral)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt}_{\substack{\text{appx con trapezi} \\ \sim \frac{f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2} \cdot \underbrace{(t_{n+1} - t_n)}_h}}$$

or also appx $\int$

sostituisco alla y esatta la y numerica

Metodo di Crank-Nicolson $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \\ u_0 = y_0 \end{array} \right. \quad n \geq 0$

è implicito