Approssimazione di derivate

Dati: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile, punti $x_i \in [a,b]$
$i = 1,\dots,n$

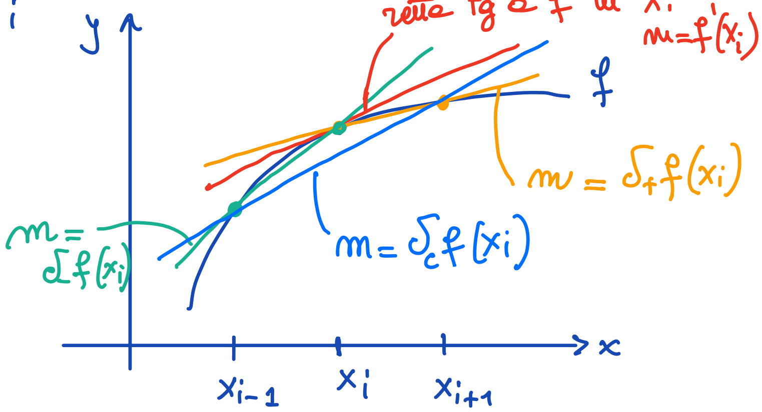
? appx $f'(x_i)$ senza usare formule di derivazione, ma solo i valori $f(x_i)$

Def

$$f'(x_i) = \lim_{x\to x_i} \frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i}$$ (dall'analisi 1)

significato geom:
$f'(x_i)$ = coeff ang della retta tg f in x_i

$y = mx + q$
↑ coeff ang



Appx $f'(x_i)$ con un rapporto incrementale:

① $$f'(x_i) \sim \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \delta_+ f(x_i)$$

rapp. in avanti o differenza finita in avanti

② $$f'(x_i) \sim \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \delta_- f(x_i)$$ differenza finita all'indietro

③ $f'(x_i) \sim \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \delta_c f(x_i)$ differenza finita centrata

Errore

? $\left| f'(x_i) - \delta_{\substack{+\\-\\c}} f(x_i) \right|$

Errore nel caso 1.

Scrivo $f(x)$ come sviluppo di Taylor di grado 1 centrato in x_i e resto di Lagrange

$$f(x) = \underbrace{f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)}_{\text{pol Taylor di grado 1}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_i)^2}_{\text{resto nella forma di Lagrange}}$$

è valida se $f \in C^2(I(x_i))$

prendo $x = x_{i+1}$ e chiamo con $h = x_{i+1} - x_i$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \cdot h + \frac{1}{2} f''(\xi) h^2$$

$$\underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}_{\delta_+ f(x_i)} = f'(x_i) + \frac{1}{2} f''(\xi) h$$

$$\Rightarrow \left| f'(x_i) - \delta_+ f(x_i) \right| = \frac{1}{2} h \left| f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} h \| f'' \|_\infty$$

Quando $h \to 0$ (cioè x_i e x_{i+1} sono sempre + vicini)

l'errore tra $\delta_+ f(x_i)$ e $f'(x_i)$ tende a zero con ordine 1 rispetto ad h –
L'errore decresce al + come h quando $h \to 0$

la diff finita in avanti è convergente del 1° ordine in h.

(2) lavorando analogamente si ha

$$|f'(x_i) - \delta_- f(x_i)| \leq \frac{1}{2} h \|f''\| \qquad (h = x_i - x_{i-1})$$

la diff finita all'indietro approx $f'(x_i)$ con un errore prop. ad h quando $h \to 0$

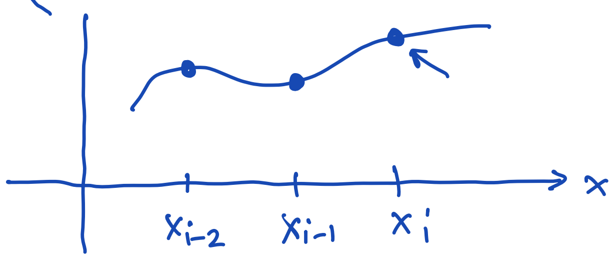
(3) $$|f'(x_i) - \delta_c f(x_i)| \leq \frac{1}{12} h^2 \|f'''\|_\infty \qquad (f \in C^3(I(x_i)))$$

la diff finita centrata appx $f'(x_i)$ con un errore prop ad h^2 quando $h \to 0$

$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

Backward differentiation formula BDF di ordine 2

$$f'(x_i) \sim \frac{1}{2h}\Big(3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})\Big) = \delta_{BDF2} f(x_i)$$



$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2}$$

$$\left| f'(x_i) - \delta_{BDF2} f(x_i) \right| \le C \cdot h^2 \qquad \text{quando } h \to 0$$

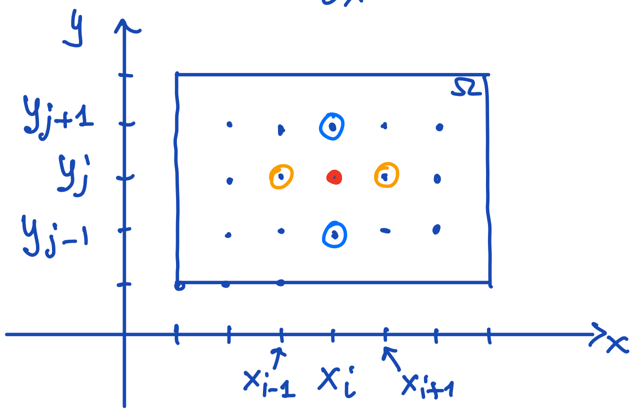
$C > 0$ indip da h

C può dipendere da f, ma non dip da h.

Estensione al caso 2D

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile rispetto ad entrambe le var.

$z = f(x, y)$? $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j)$? $\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j)$



• $P_{ij} = (x_i, y_j)$

Applico la diff. finita centrata per appx $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \sim \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \sim \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}}$$

$$\nabla f(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \end{bmatrix}$$

Errore come nel caso 1D,

$h_x = x_{i+1} - x_i$ $\qquad$ $h_y = y_{j+1} - y_j$

ho che gli errori sono propors a h_x^2 e h_y^2, rispettiv.