

Approssimazione di derivate con formule alle differenze finite.

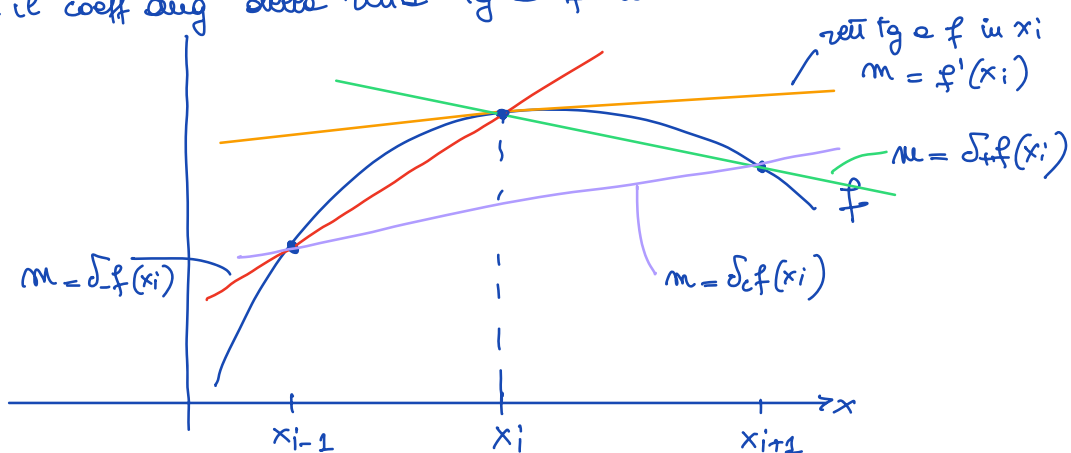
Dati $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

? $f'(x_i)$ senza usare le formule di derivazione, ma solo i valori $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

$$f'(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}$$

(è il coeff ang della retta tg a f in x_i)



Appx $f'(x_i)$ con un rapporto incrementale,

1) $\delta_+ f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ differenza finita in avanti

2) $\delta_- f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ differenza finita all'indietro

3) $\delta_c f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ differenza finita centrata

? Che errore commetto nell'appx $f'(x_i)$ con le differenze finite viste sopra.

$$e_+ = |f'(x_i) - \Delta_+ f(x_i)|$$

Definisco $h = x_{i+1} - x_i$

Scrivo lo sviluppo di Taylor di f al 1° ordine con resto di Lagrange centrato nel punto x_i

Dato $f \in C^{n+1}(I(x_0))$ e $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{\text{pol di Taylor di grado } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto nella forma di Lagrange}}$$

$n=1$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi_x)}{2} (x-x_0)^2$$

$x_0 = x_i$

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{f''(\xi_x)}{2} (x-x_i)^2$$

Valuto f nel punto x_{i+1}

$$f(x_{i+1}) = \underbrace{f(x_i)}_{\text{red arrow}} + f'(x_i) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_h + \frac{f''(\xi_x)}{2} \cdot h^2$$

$$\underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}_{\Delta_+ f(x_i)} = f'(x_i) + \frac{f''(\xi_x)}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow |f'(x_i) - \delta_+ f(x_i)| = |f''(\xi_x)| \cdot \frac{h}{2} \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \cdot h$$

se $x_{i+1} \rightarrow x_i \Leftrightarrow h \rightarrow 0$, allora $\delta_+ f(x_i) \rightarrow f'(x_i)$

con un errore proporzionale ad h

la diff finita in avanti è convergente di ordine 1 rispetto a h

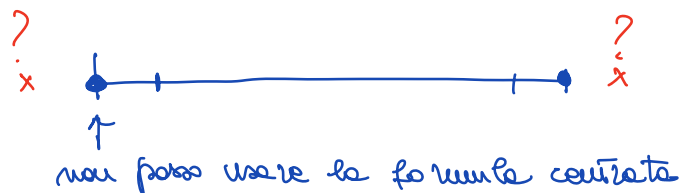
Analogo ragionamento per la diff finita all'indietro $\delta_- f(x_i)$

Anche $\delta_- f(x_i)$ è convergente di ordine 1 rispetto ad h .

Per studiare la diff finita centrata uso sviluppo di Taylor di ordine 2, dove avere $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$

e ottengo $|f'(x_i) - \delta_c f(x_i)| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{12} \cdot h^2 \quad (x f \in C^3([a, b]))$

cioè $\delta_c f(x_i)$ converge con ordine 2 rispetto ad h
al valore esatto $f'(x_i)$



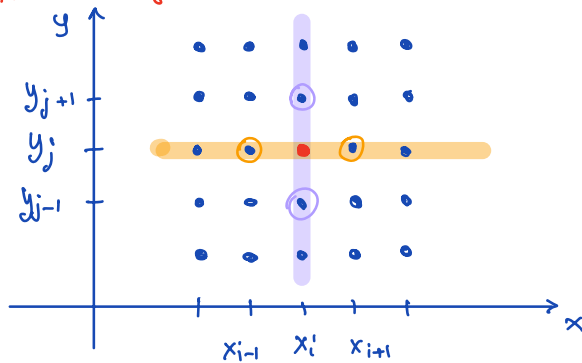
Formula del 2° ordine decentrata all'indietro

BDF2 (Backward differentiation formula di ordine 2)

$$\delta_{\text{BDF2}} f(x_i) = \frac{1}{2h} \left(3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}) \right)$$

(i nodi sono tutti equisp)

Differenze finite centrate in 2D



$$\bullet \quad P_{ij} = (x_i, y_j)$$

$$f(x, y)$$

$$\text{—} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \sim \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

è accurato al 2° ordine
rispetto ad h_x

$$\text{—} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \sim \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}}$$

è accurato al 2° ordine
rispetto ad h_y

Se $h_x = x_{i+1} - x_i$ costante per ogni i

$h_y = y_{j+1} - y_j$ costante per ogni j

Tipicamente $h_x = h_y$