Derivazione numerica

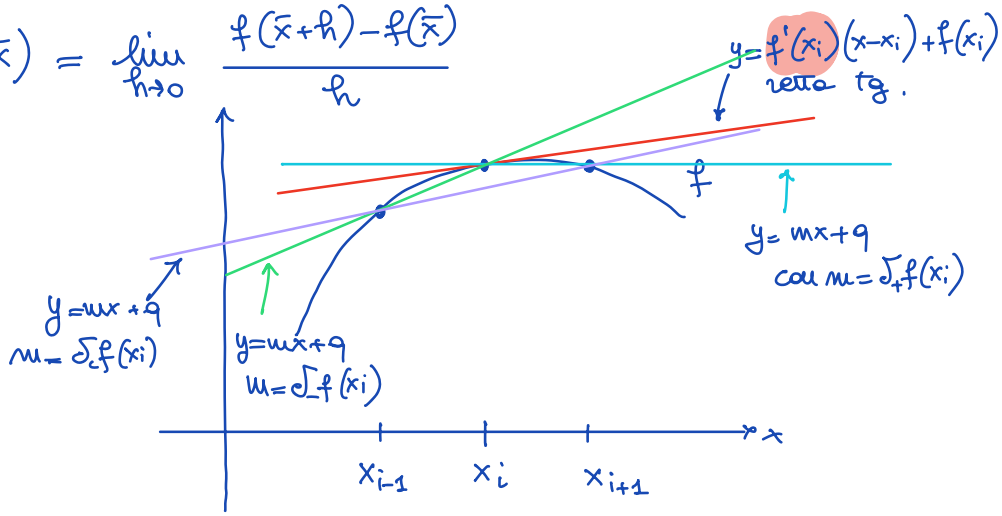
Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f derivabile

sia $\bar{x} \in [a,b]$? $f'(\bar{x})$ utilizzando alcuni valori di f

$f(\bar{x})$, $f(\bar{x}-h)$, $f(\bar{x}+h)$ con $h>0$

senza usare le formule di derivazione

Def $f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$



differenza finita in avanti $\Delta_+ f(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$

differenza finita all'indietro $\Delta_- f(x_i) = \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

differenza finita centrata $\Delta_c f(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}}$

D'ora in poi supponiamo che x_i siano equispaziati

sia $h = x_{i+1} - x_i$

? errore per la differenza finita in avanti

? $|f'(x_i) - \Delta_+ f(x_i)|$

scrivo lo sviluppo di Taylor di grado 1 centrato in x_i della funzione f con resto di Lagrange

$$f(x) = \underbrace{p_n(x)}_{\text{pol di Taylor}} + \underbrace{r_n(x)}_{\text{resto}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}(x-x_i)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_i)^{n+1}}_{r_n(x)}$$

(ξ in x_i)

$n=1$

$$f(x) = \underbrace{f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i)}_{p_1(x)} + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)^2$$

ξ è incognito si trova tra x e x_i

Valuto f in $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{h} + \frac{f''(\xi)}{2}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)^2}_{h^2}$$

$$\underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}_{\Delta_+ f(x_i)} = f'(x_i) + \frac{f''(\xi)}{2}h$$

$$\Delta_+ f(x_i) - f'(x_i) = \frac{f''(\xi)}{2}h$$

$$\left| \delta_+ f(x_i) - f'(x_i) \right| \leq \frac{h}{2} \cdot \|f''\|_\infty$$

la diff finita in avanti approx $f'(x_i)$ con un errore che si comporta come h quando $h \to 0$ a patto che

$f \in C^2(I)$ $\quad$ I = intervallo contenente i punti x_i, x_{i+1}

Analogamente

$$\left| \delta_- f(x_i) - f'(x_i) \right| \leq \frac{h}{2} \|f''\|_\infty$$ ordine 1 in h

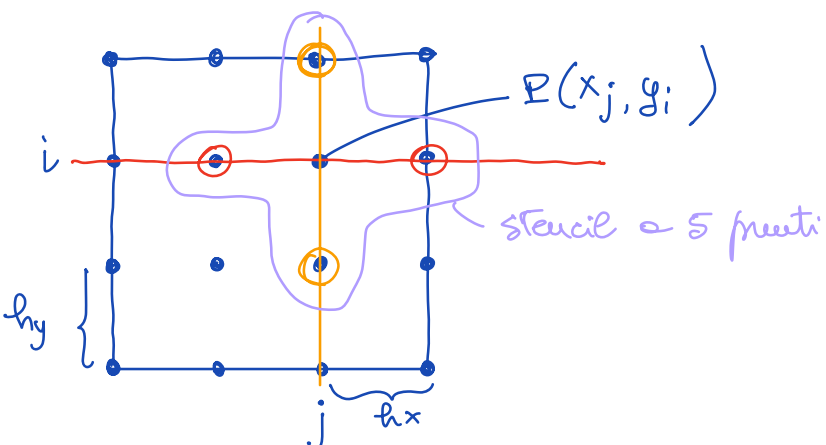
Invece

$$\left| \delta_c f(x_i) - f'(x_i) \right| \leq \frac{h^2}{12} \|f^{(3)}\|_\infty \quad (\text{se } f \in C^3)$$

ordine 2 rispetto ad h

In 2D

$f(x,y)$



$$? \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_i) \sim \frac{f(x_{j+1}, y_i) - f(x_{j-1}, y_i)}{2h_x}$$

$$? \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_i) \sim \frac{f(x_j, y_{i+1}) - f(x_j, y_{i-1})}{2h_y}$$

diff finite centrate del 2° ordine

Differenza finita all' indietro di ordine 2
(BDF2)
backward differentiation formula

$$\delta_{BF2} f(x_i) = \frac{1}{2h}\left(3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})\right)$$

appx di ordine 2 di $f'(x_i)$

