ASSOLUTA STABILITA'

E' un tipo di stabilità che serve studiare il comportam. di metodi quando e' intervallo temporale è molto ampio, idealmente infinito.

Anche con con h fissato, $N_h \to +\infty$.

Si considera un pbl lineare modello

$$\begin{cases} y'(t) = \underbrace{\boxed{\lambda \cdot y(t)}}_{= f(t,y(t))} & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

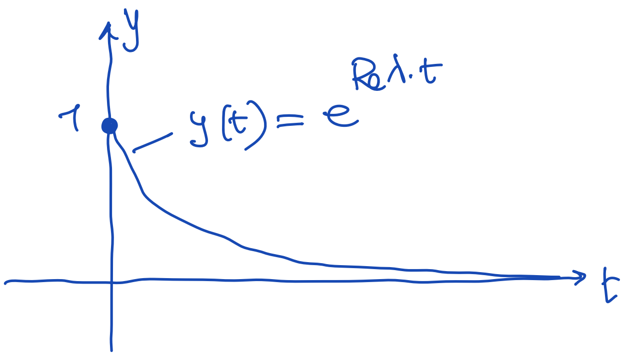
dove $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

La soluz esatta è

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{\mathrm{Re}\lambda \cdot t}\left(\cos(\mathrm{Im}\,\lambda \cdot t) + i \sin(\mathrm{Im}\,\lambda \cdot t)\right)$$

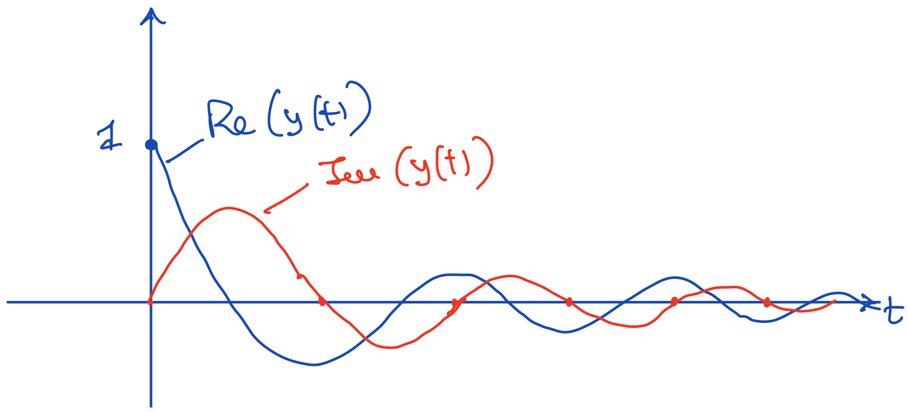
$$\lambda = \mathrm{Re}\lambda + i\,\mathrm{Im}\,\lambda \qquad (\text{exp in campo } \mathbb{C})$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}^-$ $(\mathrm{Im}\,\lambda = 0)$



Se $\operatorname{Im}\lambda \neq 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{Re}(y(t)) = e^{\operatorname{Re}\lambda \cdot t} \cdot \cos(\operatorname{Im}\lambda \cdot t)$$
$$\operatorname{Im}(y(t)) = e^{\operatorname{Re}\lambda \cdot t} \cdot \sin(\operatorname{Im}\lambda \cdot t)$$



$$|y(t)| \to 0 \text{ per } t \to \infty$$

Def Un metodo numerico per l'appx di e.d.o. è <u>ASSOLUTAMENTE STABILE</u> sul problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e per un certo $h > 0$ se la soluz numerica calcolata con questo h tende a zero quando $t_n \to \infty$, cioè

$$|u_n| \to 0 \quad \text{per } t_n \to \infty$$

(vogliamo che la sol numerica replichi il comportamento della sol esatta)

Def: Si definisce REGIONE DI ASS. STABILITA' di un metodo l'insieme

$$\mathcal{A} = \{ z = h \cdot \lambda \in \mathbb{C} \ : \ |u_n| \to 0 \text{ per } t_n \to \infty \}$$

passo di discr. — è il coeff che compare in f

cioè è l'insieme dei punti $z = h\lambda$ t.c. il metodo è ass. stabile

Ass stab per EE

per modello

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \lambda y = f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_n + h \cdot \lambda u_n = u_n (1 + h\lambda)$$

$$u_n = u_{n-1}(1 + h\lambda)$$

$$= u_{n-1}(1 + h\lambda)^2$$

$$\vdots$$

$$= u_0 (1 + h\lambda)^{n+1}$$

$$u_{n+1} = \underbrace{u_0}_{1} (1 + h\lambda)^{n+1} \qquad u_n = (1 + h\lambda)^n$$

chiedere che $|u_n| \to 0$ per $t_n \to \infty$ equivale a chiedere che $|(1+h\lambda)^n| \to 0$ per $n \to \infty$

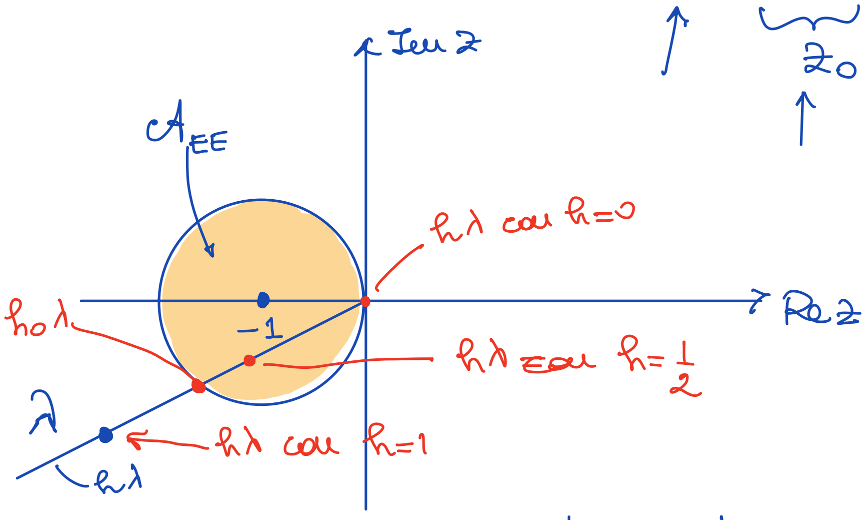
$$|(1+h\lambda)^n| = \underbrace{|1+h\lambda|}^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff |1+h\lambda| < 1$$

succ geometrica q^n che è infinitesima quando $|q|<1$

EE è ass. stab (cioè $|u_n| \to 0$ per $n \to \infty$)

se $|1+\underbrace{h\lambda}_{z}| < 1$ $\qquad$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda < 0$)

? $z \in \mathbb{C} : |1+z| < 1 \iff |z - \underbrace{(-1)}_{z_0}| < 1$ = luogo geom dei punti $z \in \mathbb{C}$ che distano da z_0 al più di una dist pari a 1.



Se $h\lambda$ soddisfa $|1+h\lambda|<1 \Rightarrow$ EE produce una sol u_n : $|u_n| \to 0$ per $n \to \infty$

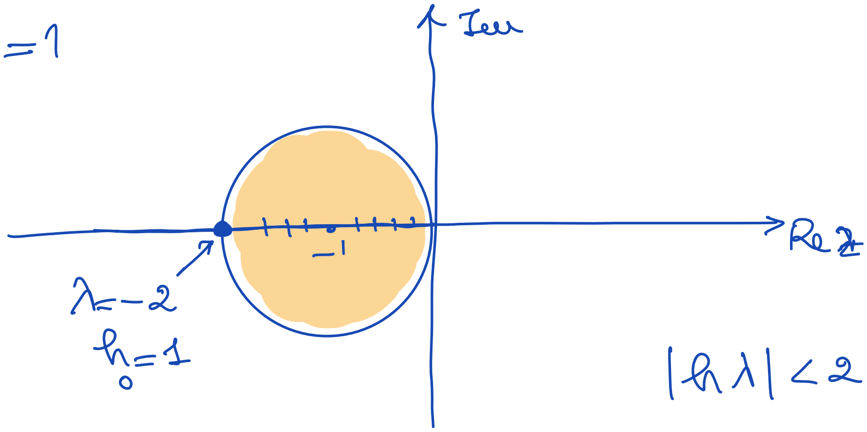
cioè EE è ass. stab.

Sia $h_0 > 0$: $h_0\lambda \in$ circonf. $\Rightarrow$ se $h \in (0, h_0)$

$\Rightarrow |1+h\lambda| < 1$ e EE è ass. stab. $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

se invece $h \geq h_0 \Rightarrow |1+h\lambda| \geq 1$ e EE non è ass stab,
cioè $|u_n| \not\to 0$ per $n \to \infty$

$\begin{cases} y' = -2y \\ y(0)=1 \end{cases}$ $\qquad \lambda = -2$



$|h\lambda| < 2$

ASS. STAB $0<h<1=h_0$ $\qquad h < 1$

---

per EE si ha ASS STAB

quando $0<h<h_0$ e $h_0 = \dfrac{-2\,\mathrm{Re}\,\lambda}{|\lambda|^2}$

lo si ottiene risolvendo $|1+h\lambda|<1$

Se λ è reale negativo $\qquad h_0 = -\dfrac{2}{\lambda}$

Ass stabilità $\Rightarrow$ zero-stabilità

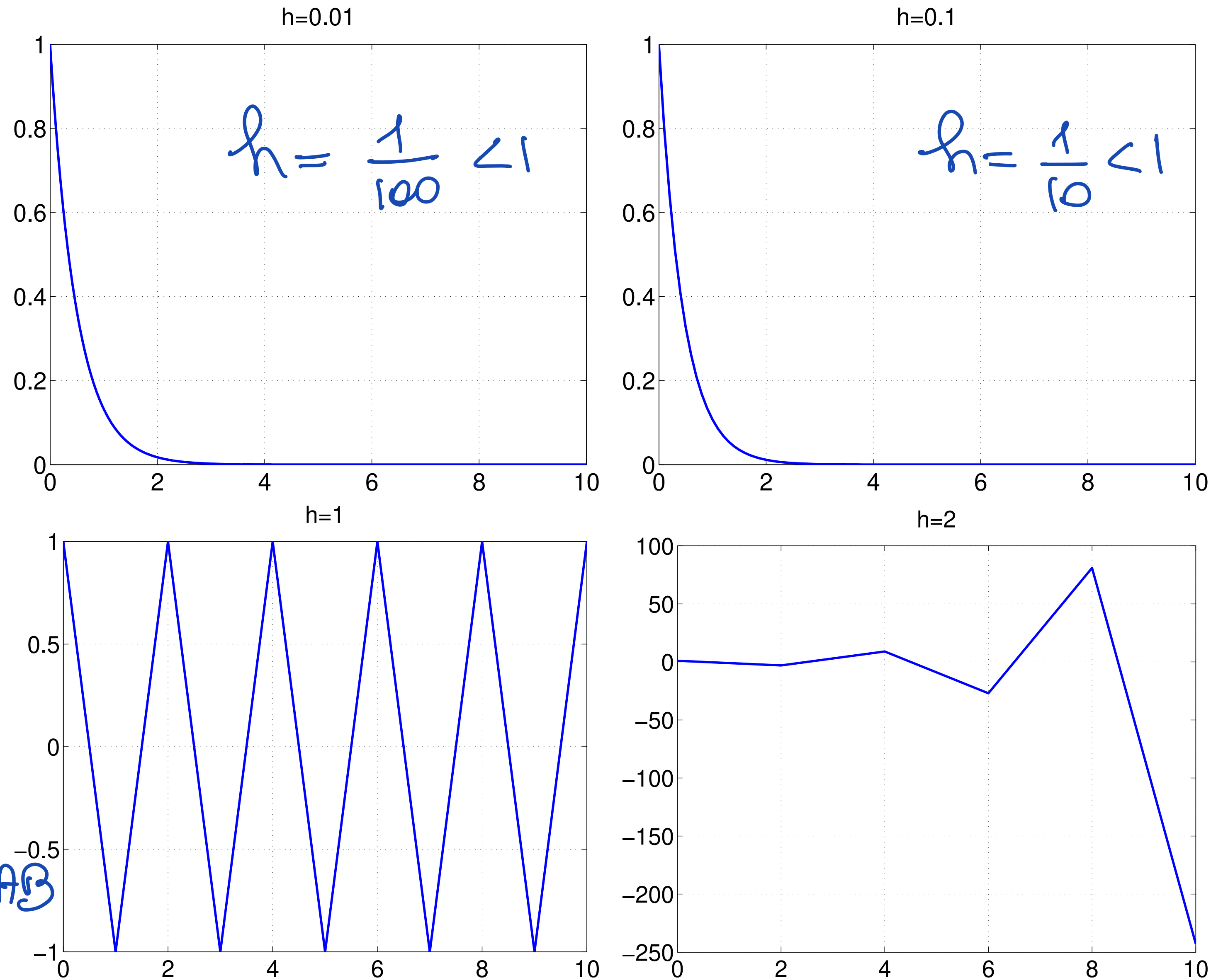
Soluzione del punto 2. Eulero esplicito

ASS STAB

$h = \frac{1}{100} < 1$

$h = \frac{1}{10} < 1$

ASS STAB



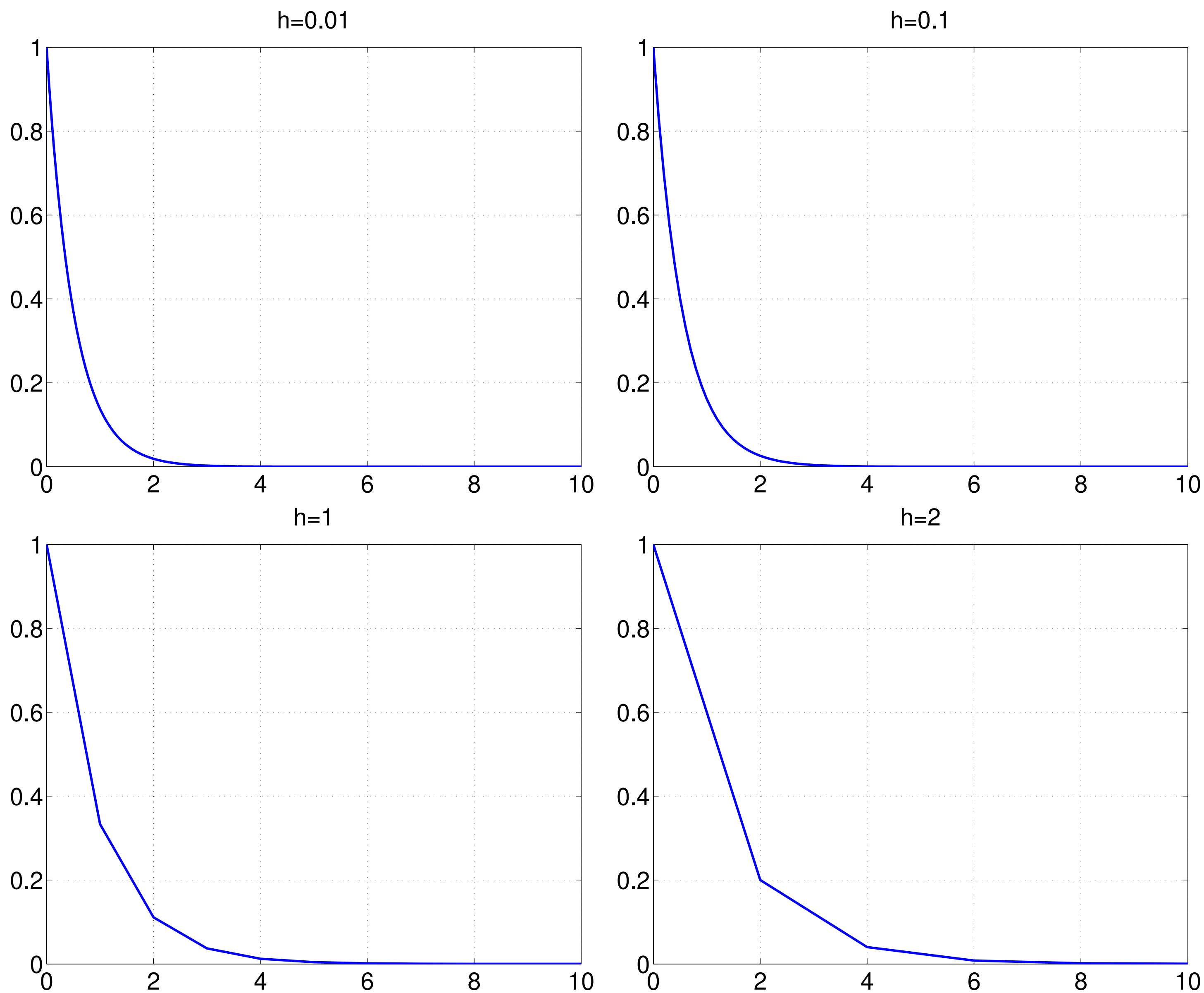
$h = 1$

NO ASS STAB

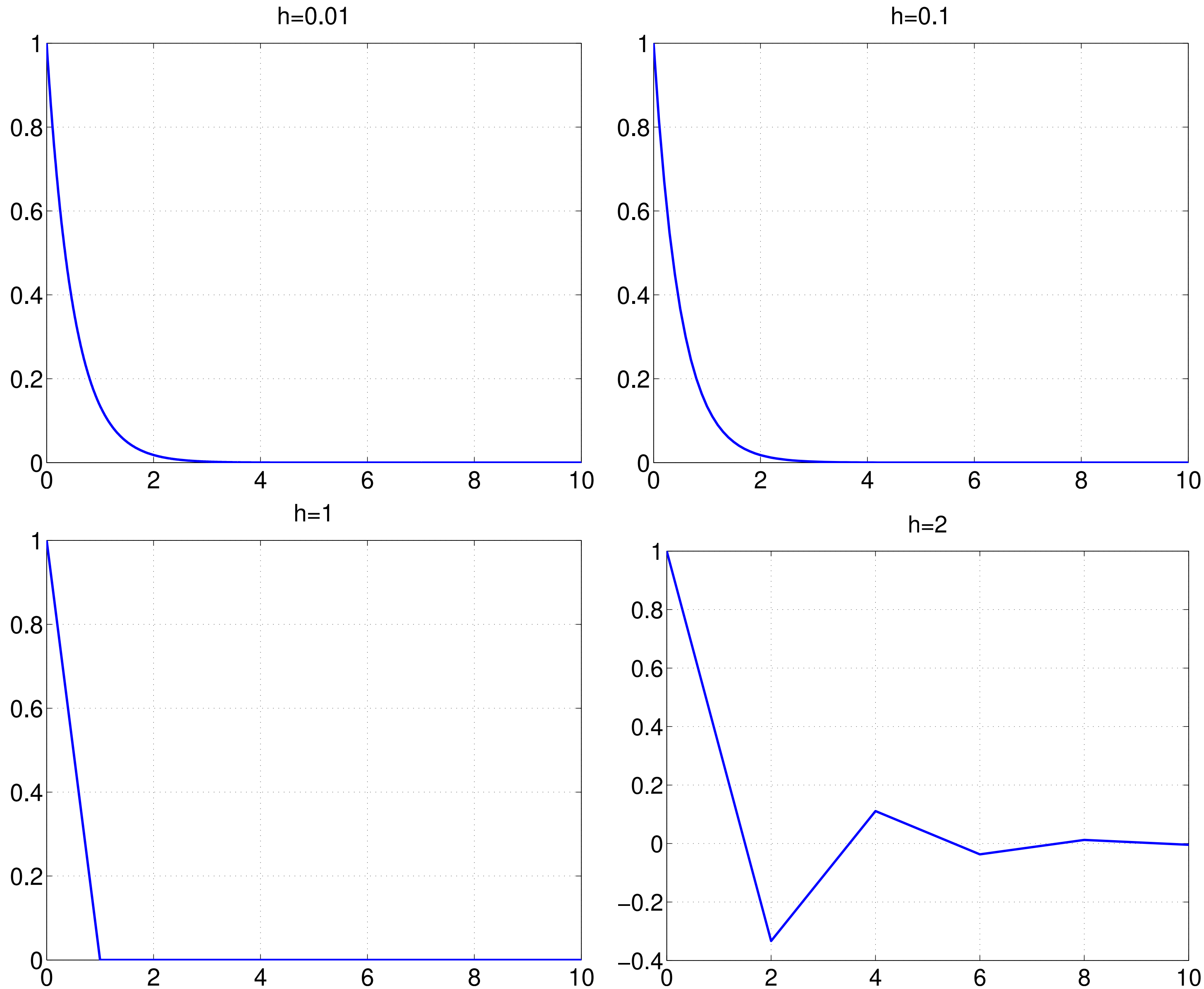
$h = 2$

NO ASS STAB

Soluzione del punto 3. Eulero implicito

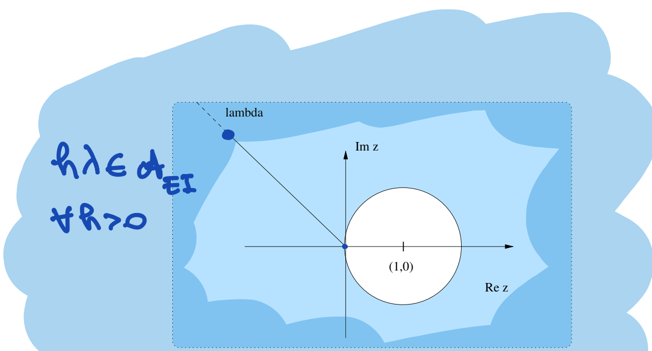


Soluzione del punto 4. Crank-Nicolson



Mentre per Eulero esplicito quando $h \geq 1$ viene a mancare l'assoluta stabilità (perchè succede che $u_n \not\to 0$ quando $t_n \to \infty$), le soluzioni ottenute con Eulero implicito e Crank-Nicolson vanno a zero per $t_n \to \infty$.
Eulero implicito e Crank-Nicolson sono assolutamente stabili per ogni $h > 0$.

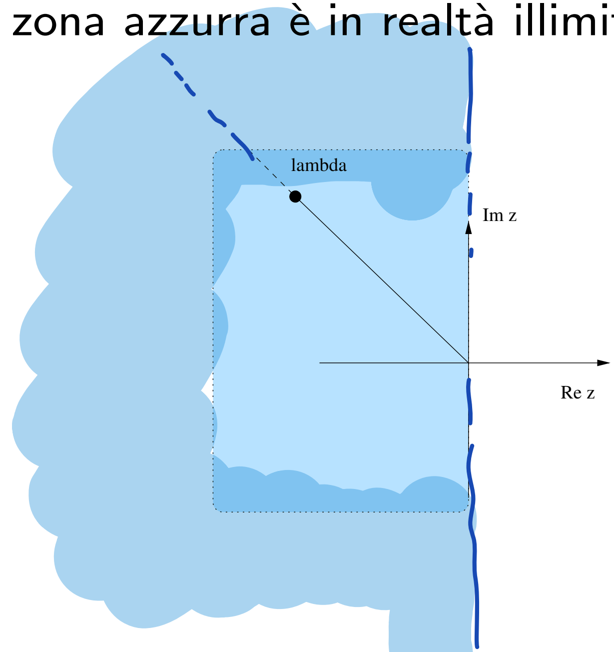
La regione di assoluta stabilità di Eulero implicito è la regione esterna alla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1 (la zona azzurra è in realtà illimitata)



EI è ass stab $\forall h > 0$
non ho restrizioni sul passo

$$\mathcal{A}_{EI} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : \ |1 - z| > 1\}$$

La regione di assoluta stabilità di Crank-Nicolson è tutto il semipiano di parte reale streattamente negativa (la zona azzurra è in realtà illimitata)



$$\mathcal{A}_{CN} = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : \ |2+z|/|2-z| < 1\}$$

CN è ass-stab $\forall h > 0$