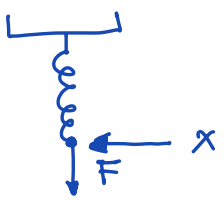
2/11/26

Approssimazione di funzioni e dati

1) Approssimazione di dati nel senso dei minimi quadrati
2) Interpolazione di funzioni
3) Interpolazione di dati

Appx di dati nel senso dei min quad

Esempio



forza impressa

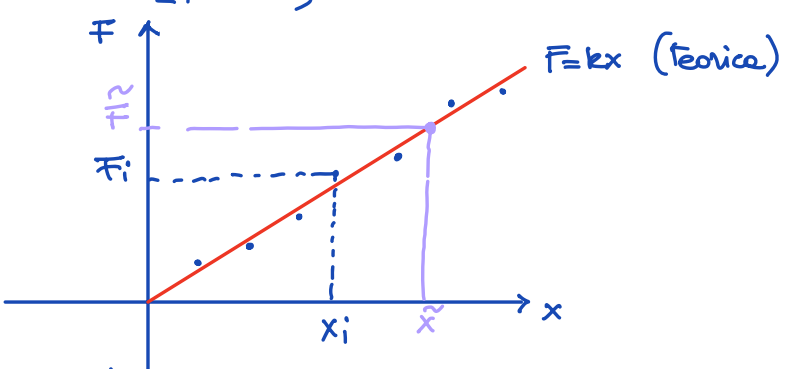
$F = kx$ ← lo spostamento rispetto all'equilibrio

$\exists\, k \in \mathbb{R}$ costante elastica

? k conoscendo alcune coppie di dati

Supponiamo forze $F_1, F_2, \dots, F_n$

misuro gli spost $x_1, x_2, \dots, x_n$

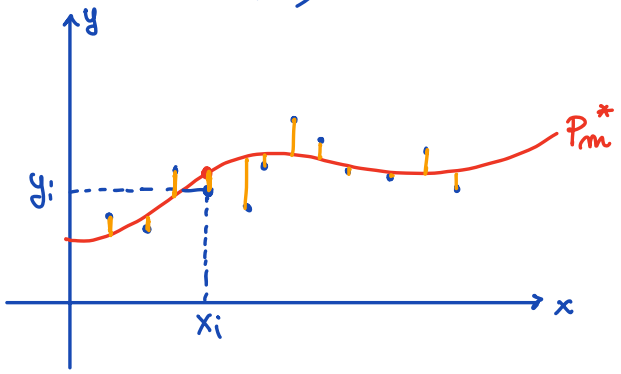


l'ob è determinare l'eq della retta $F = kx$ (cioè il suo coefficiente) conoscendo le coppie

$(x_i, F_i) \quad i = 1, \dots, n$

Appx di dati nel senso dei min quad.

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ con $i = 1, \dots, n$



? $p_m^* \in \mathbb{P}_m = \{$ sp vettoriale dei polinomi di grado $\leq m \}$ t.c.

(m = grado) con $m \ll n$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(p_m^*(x_i) - y_i \right)^2}_{\in \mathbb{R}} = \min_{p_m \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=1}^{n} \left(p_m(x_i) - y_i \right)^2 \qquad (1)$$

So che $p_m \in \mathbb{P}_m$ è t.c. $p_m(x) = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_m x + a_{m+1}$

un polinomio è univocamente determinato dai suoi coeff a_i

$$p_m^*(x) = a_1^* x^m + a_2^* x^{m-1} + \dots + a_{m+1}^*$$

definisco $\underline{a}^* = \left[a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m+1}^* \right]^T \in \mathbb{R}^{m+1}$

$$\underline{a} = \left[a_1, a_2, \dots, a_{m+1} \right]^T \in \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_1^* x_i^m + \dots + a_{m+1}^* - y_i \right)^2 = \min_{\underline{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 x_i^m + \dots + a_{m+1} - y_i \right)^2 \qquad (2)$$

Def $$J(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_1 x_i^m + a_2 x_i^{m-1} + \dots + a_m x_i + a_{m+1} - y_i \right)^2$$

(2) $\equiv$? $\underline{a}^*$: $J(\underline{a}^*) = \min_{\underline{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} J(\underline{a})$

J è una funzione $J: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$

convessa (concavità rivolta verso l'alto), ha 1 pto di min che coincide con l'unico pto stazionario, t.c.

$$\nabla J(\underline{a}^*) = \underline{0}$$

$$\nabla J(\underline{a}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial a_1}(\underline{a}^*) \\ \frac{\partial J}{\partial a_2}(\underline{a}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial a_{m+1}}(\underline{a}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} 2 \left(a_1^* x_i^m + a_2^* x_i^{m-1} + \dots + a_m^* x_i + a_{m+1}^* - y_i \right) x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} 2 \left(\quad \text{''} \quad \right) x_i^{m-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} 2 \left(\quad \text{''} \quad \right) 1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

- eliminare il 2 ovunque
- porto a dx i termini che contengono y_i
- distribuisco la sommatoria

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \right) a_1^* + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-1} \right) a_2^* + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m \right) a_{m+1}^* = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^m \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m \right) a_1^* + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} \right) a_2^* + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right) a_{m+1}^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

└ si ottiene (lineare) di $(m+1)$ eqz in $(m+1)$ incognite

la matrice M è simmetrica e def positiva

il vettore incognito è $\underline{a}^*$

il vettore t. noto è $\underline{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{m-1} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$

trovo $\underline{a}^*$ risolvendo $M\underline{a}^* = \underline{b}$

$\underline{a}^*$ è il vett dei coeff del polinomio che approx i dati $(x_i; y_i)$ nel senso dei min quad

Se raccolgo x_i in un vettore $\underline{x}$

y_i in un vettore $\underline{y}$,

definisco $X = \begin{bmatrix} \underline{x}^m, \underline{x}^{m-1}, \dots, \underline{x}, \underline{1} \end{bmatrix}$ (è rettangolare ha n righe e m+1 colonne)

si trova che $M = X^T X$ e $\underline{b} = X^T \underline{y}$

cioè $\boxed{M\underline{a}^* = \underline{b}} \iff X^T X \underline{a}^* = X^T \underline{y}$

sistema delle eqz normali

$(A^T A \underline{x} = A^T \underline{b})$

In conclusione:

1) definisco $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$

$$\underline{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$$

costruisco $X = [\underline{x}^m, \underline{x}^{m-1}, \dots, \underline{x}, \underline{1}]$

risolvo

$$X^T X \underline{a}^* = X^T \underline{y} \quad \text{con QR}$$

Nel caso in cui $m=1$ (cerco un pol di grado 1)

il polinomio trovato si chiama retta di regressione