Approssimazione di funzioni e dati

(1) Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ per $i = 1, \dots, n$

? funzione $\tilde{f}$ che approssimi questi dati

<u>Es</u>: x_i = intensità di corrente immessa in un filo elettrico

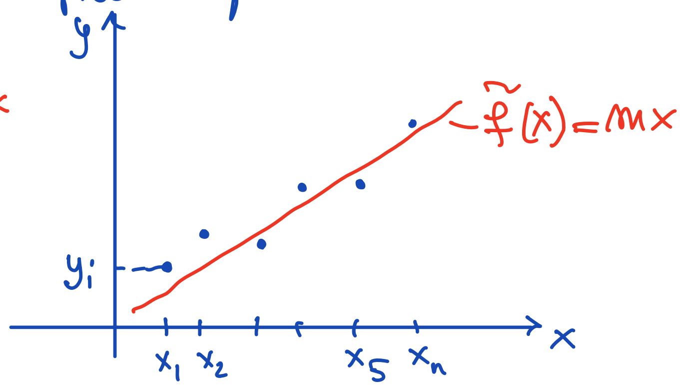
$y_i = \Delta V$ misurata ai capi del filo

? R resistenza del filo sapendo che

$\Delta V = R \cdot i$

$y = m x$

appx nel senso dei min quadrati



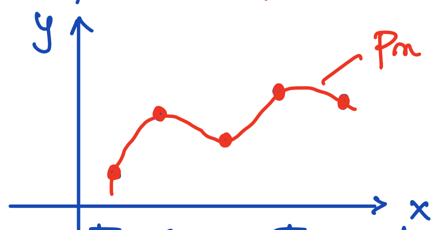
(2) Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 0, \dots, n$

? $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$ (spazio dei polinomi di grado $\leq n$)

t.c.

$\| p_n(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n \|$

<u>INTERPOLAZIONE</u>



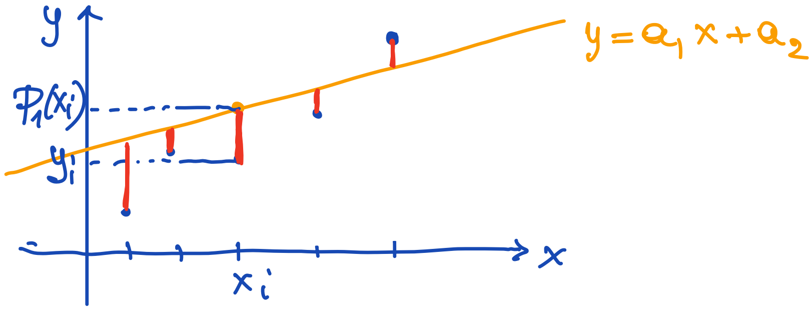
(Es: determinare una traiettoria che passi esattamente per certi punti)

APPX NEL SENSO DEI MIN. QUADRATI

Retta di regressione

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $\quad i = 1, \dots, n$

? $p_1(x) = a_1 x + a_2$ che appx i dati



Tra tutti i polinomi di grado 1 cerco quello che produce il minimo errore nel senso dei minimi quadrati, cioè def

$$E(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{p_1(x_i)}_{\text{risultati del modello}} - \underbrace{y_i}_{\text{target}} \Big)^2$$

$\underline{a} = [a_1, a_2]$,

la soluz sarà la retta $p_1(x) = a_1^* x + a_2^*$:

$$E(\underline{a}^*) = \min_{\underline{a} \in \mathbb{R}^2} E(\underline{a})$$

Incognite = coeff della retta.

$$E(\underline{a}) = (p_1(x_1) - y_1)^2 + \dots + (p_1(x_n) - y_n)^2$$
$$= (a_1 x_1 + a_2 - y_1)^2 + \dots + (a_1 x_n + a_2 - y_n)^2$$

$$= a_1^2 (\quad) + a_2^2 (\quad) + a_1 a_2 (\quad) + \dots \geq 0$$

$E(\underline{a})$ è un paraboloide convesso

$\underline{a}^* =$ punto di minimo di $E(\underline{a})$ è l'unico punto stazionario : $\nabla E(\underline{a}) = 0$

$$E(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{m} \big(\overset{a_1 x_i + a_2}{p_1(x_i)} - y_i \big)^2$$

$$\nabla E(\underline{a}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} 2(a_1 x_i + a_2 - y_i) \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^{m} 2(a_1 x_i + a_2 - y_i) \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \cancel{2} a_1 x_i^2 + \sum_i \cancel{2} a_2 x_i - \sum_i \cancel{2} y_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \cancel{2} a_1 x_i + \sum_i \cancel{2} a_2 - \sum_i \cancel{2} y_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_2 \underbrace{\sum_{i=1}^{m} 1}_{m} = \sum_{i=1}^{m} y_i \end{cases}$$

si st lineare di 2 eqz in 2 incognite

$$M = \begin{bmatrix} \overset{\underline{x}^T \cdot \underline{x}}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} & \overset{\underline{x}^T \underline{1}}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \\ \underset{\underline{x}^T \underline{1}}{\sum_{i=1}^{m} x_i} & \underset{\underline{1}^T \cdot \underline{1}}{m} \end{bmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \quad M\,\underline{a} = \underline{b}$ $\qquad M$ è simmetrica e def. pos.

trovo il vett dei coeff $\underline{a} = \underline{a}^*$ cioè sol nel senso dei min quadrati

$\underline{a}^*$ identifica univocam il polinomio cercato (la retta di regressione)

Def $\quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} \underline{x}^T \underline{x} & \underline{x}^T \underline{1} \\ \underline{x}^T \underline{1} & \underline{1}^T \underline{1} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{y}^T \underline{x} \\ \underline{y}^T \underline{1} \end{bmatrix}$$

posto $X = \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{1} \end{bmatrix}$ ...... $M = X^T X$ e $\underline{b} = X^T \underline{y}$

cioè $\quad M\,\underline{a} = \underline{b} \iff \boxed{X^T X\, \underline{a} = X^T \underline{y}}$ sistema delle eqz normali

$$\left(A^T A\, \underline{x} = A^T \underline{b} \right)$$

posso usare QR nella matrice X e risolvere $X^T X\, \underline{a} = X^T \underline{y}$ di conseguenza

Caso di polinomio di grado $m>1$

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i = 1, \dots, n$

? $p_m(x) = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_{m+1}$

t.c. p_m appx i dati nel senso dei min quad,

cioè, definisco $\underline{a} = [a_1, \dots, a_{m+1}]$

$$E(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} (p_m(x_i) - y_i)^2$$

e cerco $\underline{a}^* \in \mathbb{R}^{m+1}$:

$$E(\underline{a}^*) = \min_{\underline{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} E(\underline{a})$$

$E(\underline{a}) \geq 0$ paraboloide convesso rispetto ad $\underline{a}$

e $\underline{a}^*$ è l'unico pto stazionario di E cioè

$$\nabla E(\underline{a}^*) = \underline{0} .$$

Ripetendo i conti (in maniera simile a prima)

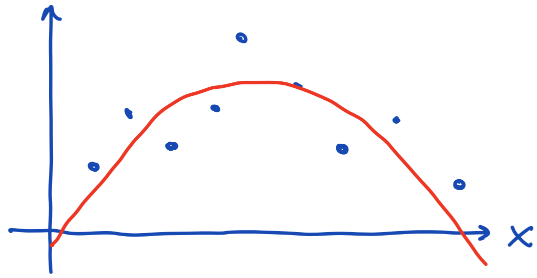
costruisco $X = \left[\underline{x}^m \middle| \underline{x}^{m-1} \middle| \dots \middle| \underline{x} \middle| \underline{1} \right]$, $X \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$

dove $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

e risolvo il sist delle eqz normali $X^T X \underline{a} = X^T \underline{y}$

la soluzione $\underline{a}$ è $\underline{a}^*$ cercato.

Tipicamente n = n° punti >> grado m



In matlab:

$\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]$ (riga o colonna)

$\underline{y} = [y_1, \dots, y_n]$ grado del polinomio

$\underline{a}$ = polyfit($\underline{x}$, $\underline{y}$, m)

↑ vettore dei coeff del pol p_m che appx i dati nel senso dei min quad.

polyfit al suo interno costruisce X, fatt QR e risolve $\tilde{R}\,\underline{a} = \tilde{Q}^T \underline{y}$

Caso in cui i dati sono periodici

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $\quad i = 1, \dots, n$

cerco $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x)$

possono essere sin/cos

si costruisce $E(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{f}(x_i) - y_i \right)^2$

e si cerca $\underline{a}^*$: $E(\underline{a}^*) = \min\limits_{a \in \mathbb{R}^m} E(\underline{a})$

sol nel senso dei min.

polyfit non può essere usato.

In alternativa, costruisco

$$X = \left[\varphi_1(\underline{x}) \;\middle|\; \varphi_2(\underline{x}) \;\middle|\; \cdots\cdots \;\middle|\; \varphi_m(\underline{x}) \right]$$

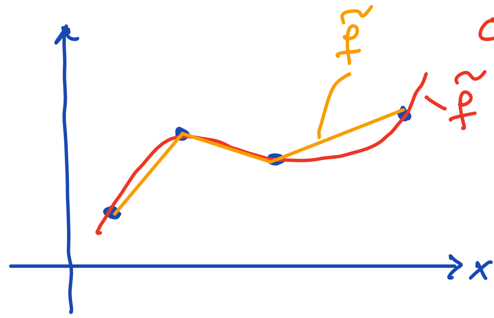
e $X^T X \underline{a} = X^T \underline{y}$ resta come prima.

Risolvo questo sistema invece di chiamare polyfit

INTERPOLAZIONE

Dati $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $\quad i = 0, \dots, n$

? $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\underbrace{\tilde{f}(x_i) = y_i \quad \text{per } i = 0, \dots, n}_{\text{condizioni di interpolazione}}$

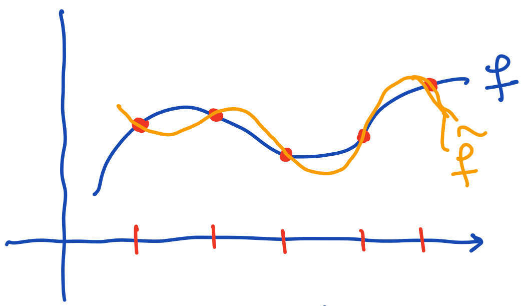


∃ vari criteri per costruire $\tilde{f}$:

- interpolazione globale di Lagrange
- interpolazione composita di Lagrange
- interpolazione con spline

Applico interpolazione anche quando conosco una certa $f(x)$ continua e cerco una

$$\tilde{f}(x) : \quad \tilde{f}(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$$



$f(x) = e^{x^2}$ $\quad$ il mio obiettivo è calcolare $\int_0^1 e^{x^2} dx$

$\tilde{f}(x)$ che interpola $f(x)$ e che so integrare

(ad es un polinomio)

$$\underbrace{\int_0^1 \underbrace{e^{x^2}}_{f(x)} dx}_{\text{non lo so calcolare}} \sim \underbrace{\int_0^1 \tilde{f}(x)\, dx}_{\text{so calcolare}}$$

Proposizione

Siano $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i=0,\dots,n$, $(n+1)$ punti t.c. x_i siano tutti distinti.

Allora $\exists!$ polinomio $p_n(x) \in \mathbb{P}_n = \{$sp dei polinomi di grado $\leq n\}$ t.c. $p_n(x_i) = y_i$ per $i=0,\dots,n$.

p_n è detto polinomio di interpolazione globale di Lagrange interpolante i dati (x_i, y_i).

Inoltre se $y_i = f(x_i)$ con f continua, allora p_n è detto interpolatore globale di Lagrange di f

Dimostrazione operativa.

Cerco $p_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$

t.c. $p_n(x_i) = y_i$ per $i=0,\dots,n$

$$\begin{cases} p_n(x_0) = a_1 x_0^n + a_2 x_0^{n-1} + \dots + a_n x_0 + a_{n+1} = y_0 \\ p_n(x_1) = a_1 x_1^n + a_2 x_1^{n-1} + \dots + a_n x_1 + a_{n+1} = y_1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vdots \\ p_n(x_n) = a_1 x_n^n + a_2 x_n^{n-1} + \dots \dots + a_n x_n + a_{n+1} = y_n \end{array}\right.$$

sist lineare quadrato di dim $n+1$

la matrice è

$$X = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & & x_1 & 1 \\ & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

matrice di Vander Monde è non singolare se x_i sono tutti distinti

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

riscrivo il sistema $X\underline{a} = \underline{y}$

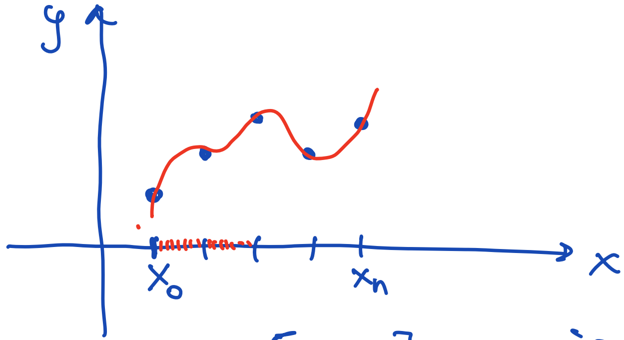
poiché X è non sing $\Rightarrow \exists!$ sol $\underline{a} \Rightarrow \exists!$ polinomio interpolatore

Operativamente:

1) $\underline{x} = [x_0 \dots \quad x_n]^T$ (colonna)

$\underline{y} = [y_0 \; --- \; y_n]^T$ (colonna)

(*) $\left[\begin{array}{l} X = [\underline{x}^n, \underline{x}^{n-1}, \dots, 1] \quad (X = \text{vander}(\underline{x})) \\ \text{risolvo } X\underline{a} = \underline{y} \end{array}\right.$



$x1$ = vett di punti in $[x_0, x_n]$ ben più fitti dei nodi di interpolazione (linspace)

valuto $p_n(x)$ nei punti del vettore $x1$

di seguito

$y1 = \text{polyval}(\underline{a}, x1)$ valuta il pol i cui coeff sono memor. in $\underline{a}$ nei punti del vett $x1$ e salva i valori in $y1$

(*) può essere sostituita da

$a = \text{polyfit}(x, y, n)$ dove n deve essere uguale al n° di punti meno 1.

12/11/24

Problema: quando n è alto

cond (X) può essere molto alto

(X è la matrice di VanderMonde)

$\Rightarrow$ grossi errori nel calcolare $\underline{a}$, di conseguenza

il polinomio interpolatore.

Alternativa: cambiare la base di rappresentazione del polinomio.

$\mathbb{P}_n = \{$spazio dei polinomi a coeff reali, di grado $\leq n\}$

è sp vett di dim $= (n+1)$

$\mathcal{B}_{mon} = \{1, x, x^2, \dots\dots, x^n\}$ è la base dei monomi per $\mathbb{P}_n$

$$\mathbb{P}_n \ni p_n = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots\dots + a_n x + a_{n+1} \cdot 1$$

Alternativamente alla base dei monomi $\mathcal{B}_{mon}$ considero la base di Lagrange

$$\mathcal{B}_L = \left\{ \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad , \quad i = 0, \dots, n \ \text{ e } \ x_i \text{ distinti nodi di interpolaz} \right\}$$

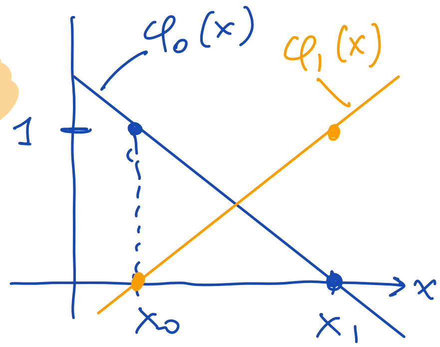
$\mathcal{B}_L$ è una base per $\mathbb{P}_n$.

ES $n = 1$: $\mathbb{P}_1 = \{$ polinomi di grado $\leq 1 \}$

$\mathcal{B}_L = \{ \varphi_0(x), \varphi_1(x) \}$ - Ho x_0, x_1

$$\varphi_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{1} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

i retta



$$\varphi_0(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} = 1$$

$$\varphi_0(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} = 0$$

$$\varphi_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{1} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

i retta

$$\varphi_1(x_0) = \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} = 0 \qquad \varphi_1(x_1) = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

Ogni polinomio di grado 1 che interpola i valori (x_i, y_i) con $i = 0, 1$ può essere scritto come comb lineare di φ_0 e φ_1

$$p_1(x) = \tilde{a}_0 \varphi_0(x) + \tilde{a}_1 \varphi_1(x)$$

cerco $\tilde{a}_0$ e $\tilde{a}_1$ imponendo le cond di interp

$p_1(x_i) = y_i$

$$P_1(x_0) = \tilde{a}_0 \underbrace{\varphi_0(x_0)}_{1} + \tilde{a}_1 \underbrace{\varphi_1(x_0)}_{0} = y_0$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_0 = y_0 \quad (\text{dato})$$

$$P_1(x_1) = \tilde{a}_0 \underbrace{\varphi_0(x_1)}_{0} + \tilde{a}_1 \underbrace{\varphi_1(x_1)}_{1} = y_1$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_1 = y_1 \quad (\text{dato})$$

$$\Rightarrow P_1(x) = y_0 \varphi_0(x) + y_1 \varphi_1(x)$$

non c'è bisogno di calcolare i coeff perchè y_0 e y_1 sono dati del problema

retta che interpola i punti $(x_i; y_i)$, $i=0,1$

L'unico pbl è valutare le funzioni di base in maniera efficiente in un generico x.

ES $n = 2$ Dati $(x_i; y_i)$ con $i=0,\dots,2$

$p_2 \in \mathbb{P}_2$, $\quad B_L = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$

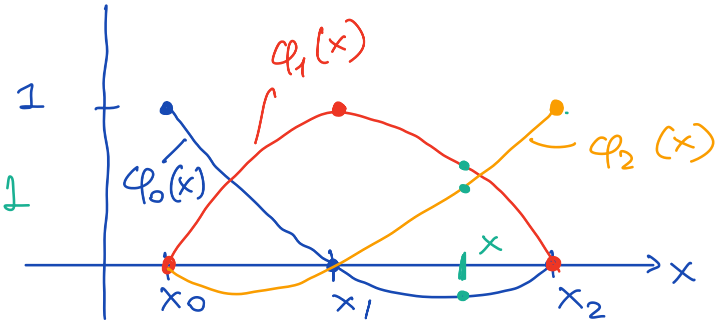
$$\varphi_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{n \to 2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \quad \text{parabole}$$

$$\varphi_0(x_0) = 1, \quad \varphi_0(x_1) = 0, \quad \varphi_0(x_2) = 0$$

$\varphi_1(x_0) = 0 \qquad \varphi_1(x_1) = 1 \qquad \varphi_1(x_2) = 0$

$\varphi_2(x_0) = 0 \qquad \varphi_2(x_1) = 0 \qquad \varphi_2(x_2) = 1$

$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$
$\forall x \in [x_0, x_2]$



In questi casi $p_2 \in \mathbb{P}_2$ interpolante i dati (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, 2$ si può scrivere come

$$p_2(x) = y_0 \varphi_0(x) + y_1 \varphi_1(x) + y_2 \varphi_2(x)$$

n generico

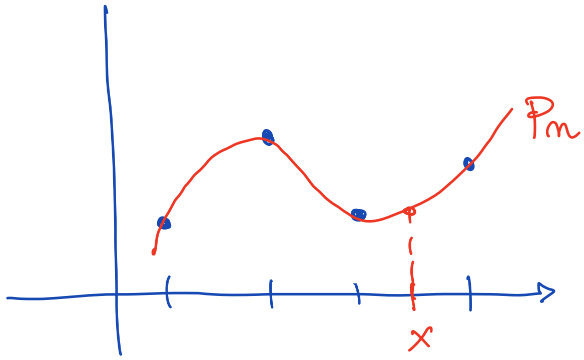
$B_L \ni \varphi_i(x)$ dello spazio $\mathbb{P}_n$ sono polinomi di grado n e hanno la proprietà

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{delta di Kronecker}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Altra proprietà dei $\varphi_i(x)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in [x_0, x_n]$



Si dimostra che

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x) \qquad \forall n$$

se voglio valutare P_n in una $x \neq x_i$ devo saper valutare le $\varphi_i(x)$ in maniera efficiente

Formula baricentrica

Riparto da
$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} =$$

$$= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j) \cdot \underbrace{\boxed{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}}}_{= w_i}$$

(si calcola una volta per tutte noti i nodi x_i)

$$= \frac{\underbrace{\boxed{\prod_{j=0}^{n} (x-x_j)}}_{\ell(x)}}{(x-x_i)} \cdot w_i = \ell(x) \cdot \frac{w_i}{x-x_i}$$

$$\left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j) = (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n) \right.$$

Ricordando che $\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) = 1$

abbiamo
$$\sum_{i=0}^{n} \ell(x) \frac{w_i}{x-x_i} = 1$$

$$\ell(x) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x-x_i}}$$

$$\Rightarrow \varphi_i(x) = \overbrace{\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x-x_i}}}^{\ell(x)} \cdot \frac{w_i}{x-x_i}$$

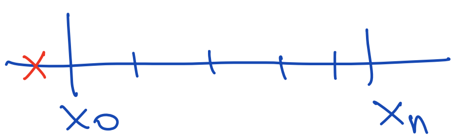
|| formula efficiente per valutare φ_i nel nodo x

Segue che
$$\boxed{p_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x) = \boxed{\frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i w_i}{x-x_i}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x-x_i}}} \quad \text{se } x \neq x_i$$

quando $x = x_i$, la forma sopra non serve perché so che $p_n(x_i) = y_i$ (che già conosco)

la formula baricentrica ci permette di valutare il pol di interp di Lagrange in un nodo $x \in [x_0, x_n]$

senza dover risolvere

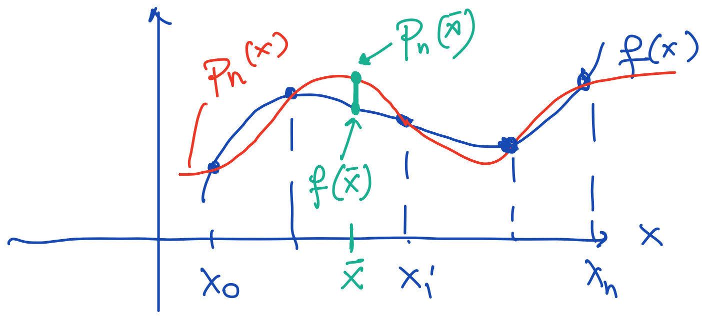


sistemi lineari, quindi con un costo computazionale minore dell'approccio con matrice di Van der Monde.

Analisi dell'errore di interpolazione

Suppongo che i valori $y_i = f(x_i)$

Mi chiedo quanto bene P_n approssimi f in un pto $x \neq x_i$



? $|P_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|$

Teorema: Se $f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$ (f è derivabile $n+1$ volte e $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ sono funz cont) e x_i sono distinti per $i=0,\dots,n$ allora $\forall x \in [x_0, x_n]\ \exists\, \xi_x \in [x_0, x_n]$:

$$f(x) - P_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}_{\to\, 0 \text{ quando } n \to \infty}$$

N.B. non è detto che $\to 0$ quando $n \to \infty$

Si potrebbe pensare che quando $n \to \infty$ ($n°$ di punti di interpolazione che $\to \infty$) la parte di dx della stima $\to 0$

cioè che p_n appx sempre meglio f
quando $n \to \infty$

Definendo $\|f - p_n\|_\infty = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - p_n(x)|$

non è garantito che

$$\|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

Il comportamento di $\|f - p_n\|_\infty$ dipende da f e dalla scelta dei nodi di interpolazione x_i.

Se i nodi x_i sono equispaziati è molto frequente che $\|f - p_n\|_\infty$ esplode quando $n \to \infty$

Vedere file interpolazione_esempi.pdf

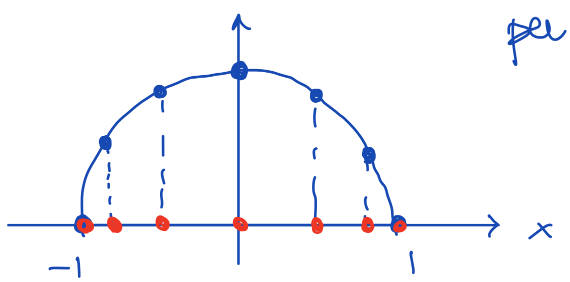
Rimedio: scegliere nodi opportuni, come ad esempio i nodi di Chebyshev, per garantire che

$$\|f - p_n\|_\infty \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Nodi di Chebyshev, punto da $[-1, 1]$

$(n+1)$ nodi di Chebyshev sono $\tilde{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right)$

per $i = 0, \dots, n$



$n = 6$

Su un intervallo $[a,b]$ si ha la formula

$$x_i = \frac{(b-a)}{2}\tilde{x}_i + \frac{b+a}{2} \qquad \text{per } i=0,\dots,n$$

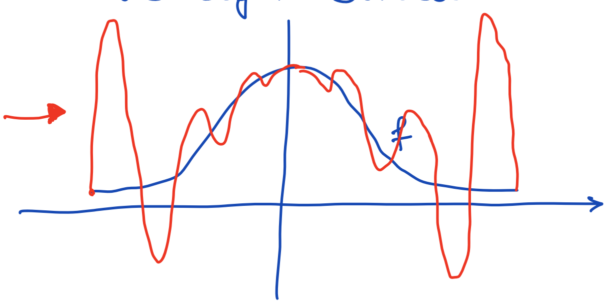
i nodi di Cheb sono rimappati su un intervallo $[a,b]$, conservando i rapporti delle distanze.

Conclusione

- Se x_i sono i nodi di Cheb, si dimostra che
  $$\|f-p_n\|_\infty \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

- Se x_i sono equisp, non è detto che
  $$\|f-p_n\|_\infty \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$
  e tipicamente con n alto si generano delle oscillazioni del $p_n(x)$ nelle parti dell'intervallo vicine agli estremi.

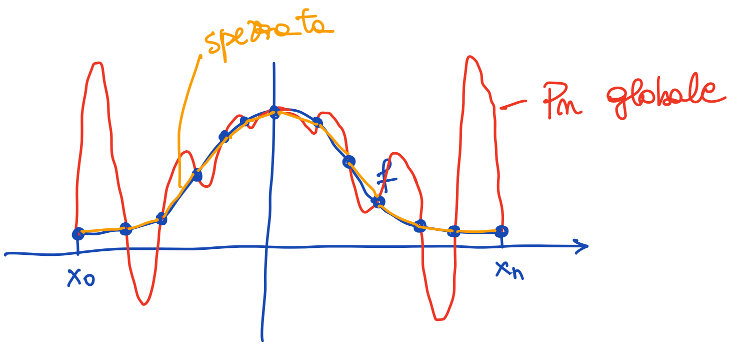
Si parla di fenomeno di Runge



Interpolazione composita di Lagrange

Sono vincolata a certi nodi x_i e voglio evitare il fenomeno di Runge

Idea: suddivido l'intervallo di interpolazione in intervalli + piccoli e su ognuno utilizzo un grado basso

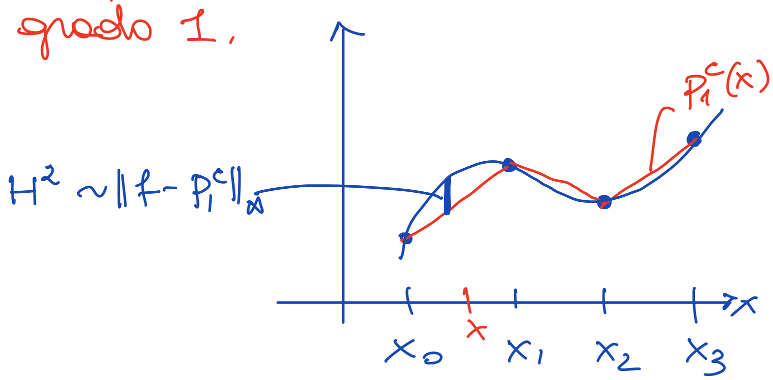


Considero $(n+1)$ punti $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$
x_i distinti.

Ora costruisco $P_1^c(x)$:
1. $P_1^c(x) \in C^0([x_0, x_n])$
2. $P_1^c(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n$ (cond. di interpolaz)
3. $P_1^c \Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1$

P_1^c è globalmente continua e localmente polinomio di grado 1

$P_1^c(x)$ = interpolatore composito di Lagrange di grado 1.



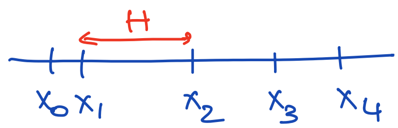
Errore di interpolazione per P_1^c

Thm: Se $f \in C^2([x_0, x_n])$, allora

$$0 \le \|f - P_1^c\|_\infty \le C \cdot \underset{\to 0}{H^2} \cdot \|f''\|_\infty$$

costante indipendente da H

dove $H = \max\limits_{0 \le i \le n} |x_{i+1} - x_i|$



Se faccio crescere n (n° punti $\to \infty$)
(e $H \to 0$) $\Rightarrow$ $\|f - P_1^c\|_\infty \to 0$

La stima dice anche che quando $H \to 0$
l'errore $\|f - P_1^c\|_\infty \to 0$ come H^2

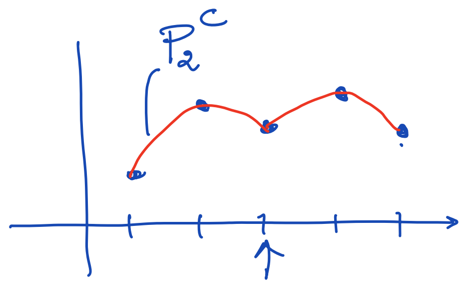
cioè se riduco H di un ordine di grandezza

$\Rightarrow$ l'errore si riduce di 2 ordini

$\frac{H_1}{H_2} = \frac{1}{10}$ $\quad H_1 = \frac{1}{10}$ $\quad$ err $= 2 \cdot 10^{-1}$

$\quad H_2 = \frac{1}{100}$ $\quad$ err $= 2 \cdot 10^{-3}$

interp. composita con grado polinomiale 2



devo usare 3 nodi per ogni pezzetto (che sarà una parabola)

P_2^C = interpolatore composito di lagrange di grado 2

- $P_2^C \in C^0([x_0, x_n])$ continuità globale
- $P_2^C(x_i) = y_i$ interpolazione
- $P_2^C\big|_{[x_i, x_{i+2}]} \in \mathbb{P}_2$ grado 2 locale

errore di interpolazione per P_2^C

$$\text{Se } f \in C^3([x_0, x_n]) \Rightarrow \|f - P_2^C\|_\infty \le C\, H^3 \cdot \|f'''\|_\infty$$

aumentando il grado locale, aumenta anche l'esponente di H, cioè l'errore ora decresce come H^3 quando $H \to 0$.

Pur alzando il grado locale, non si guadagna in regolarità globale.

SPLINE INTERPOLATORIE

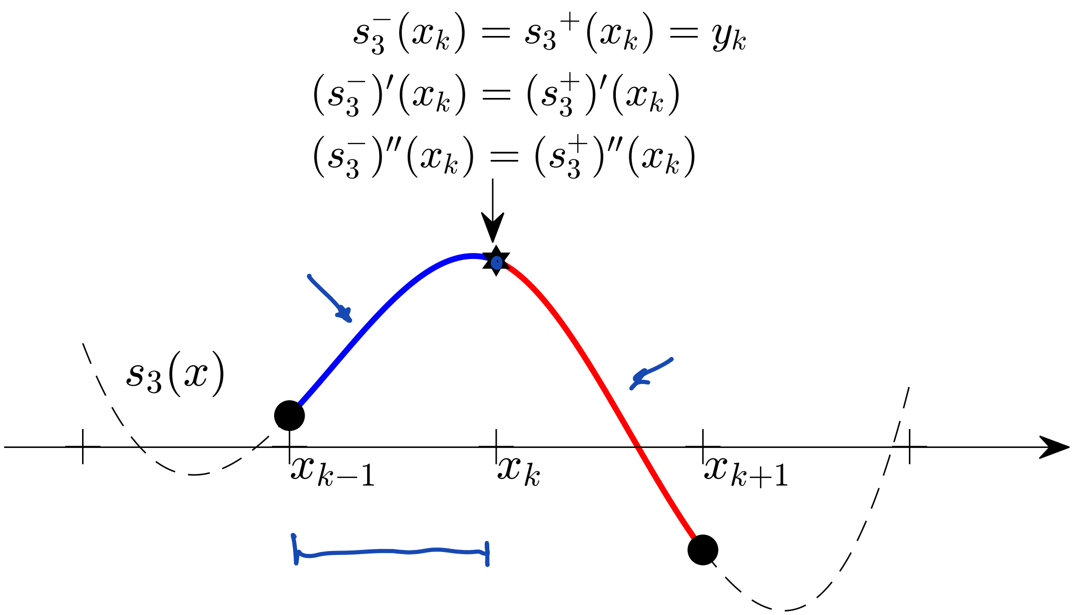
È una forma di interpolazione composita per cui si ha una regolarità più che C^0 (saranno presentate in dettaglio durante il laboratorio di venerdì)

Interpolazione con spline

Dati i punti $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ per $k = 0, \ldots, n$, definisco $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ l'intervallino tra due nodi successivi.

Una **spline cubica** è una funzione $s_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con queste proprietà:

1. $s_3 \in C^2([x_0, x_n])$, cioè s_3 è globalmente di classe C^2,
2. $s_{3|I_k} \in \mathbb{P}_3$ per $k = 0, \ldots, n-1$, cioè s_3 è un polinominio di grado 3 su ogni intervallino: $s_{3|I_k}(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k$. Su ogni intervallino ho 4 coeff. diversi;
3. $s_3(x_k) = y_k$ per $k = 0, \ldots, n$, cioè s_3 interpola i dati.



Dire $s_{3|I_k} \in \mathbb{P}_3$ per $k = 0, \ldots, n-1$ vuol dire che sull'intervallino $i-$simo s è caratterizzata da 4 parametri:

$$s_3(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k \qquad \forall x \in I_k.$$

Se ho n intervalli, il **numero totale di parametri (incogniti)** che caratterizzano s è $4n$.

Quante equazioni abbiamo per determinarli?:

- $(n+1)$ condizioni di interpolazione (nei nodi x_k, $k = 0, \ldots, n$),
- $(n-1)$ condizioni di continuità $s_3^-(x_k) = s_3^+(x_k)$ (nei nodi x_k, $k = 1, \ldots, n-1$),
- $(n-1)$ condizioni di continuità della derivata prima $(s_3^-)'(x_k) = (s_3^+)'(x_k)$,
- $(n-1)$ condizioni di continuità della derivata seconda $(s_3^-)''(x_k) = (s_3^+)''(x_k)$,

In totale: $4n-2$ equazioni.

Servono ancora 2 condizioni per chiudere il sistema:

- **spline naturali**: impongono che $s_3''(x_0) = 0$ e $s_3''(x_n) = 0$,
- **spline not-a-knot**: impongono che s_3''' continua in x_1 e x_{n-1}.

Analisi dell'errore dell'interpolazione spline

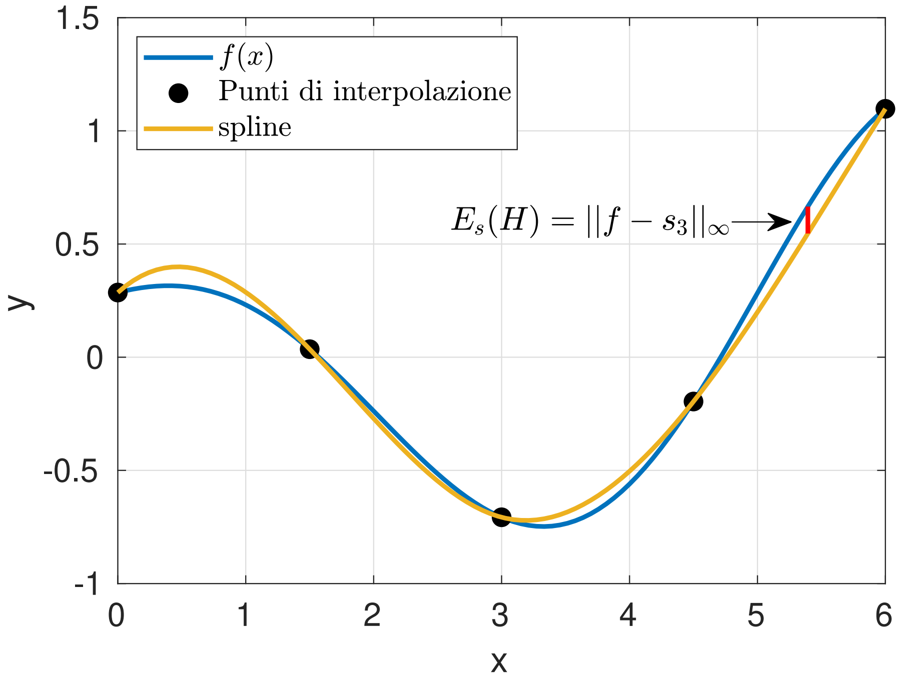
Sia

$$H = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

Se $f \in C^4([x_0, x_n])$, esiste una costante $c_2 > 0$ indipendente da H t.c. (s_3 dipende da H):

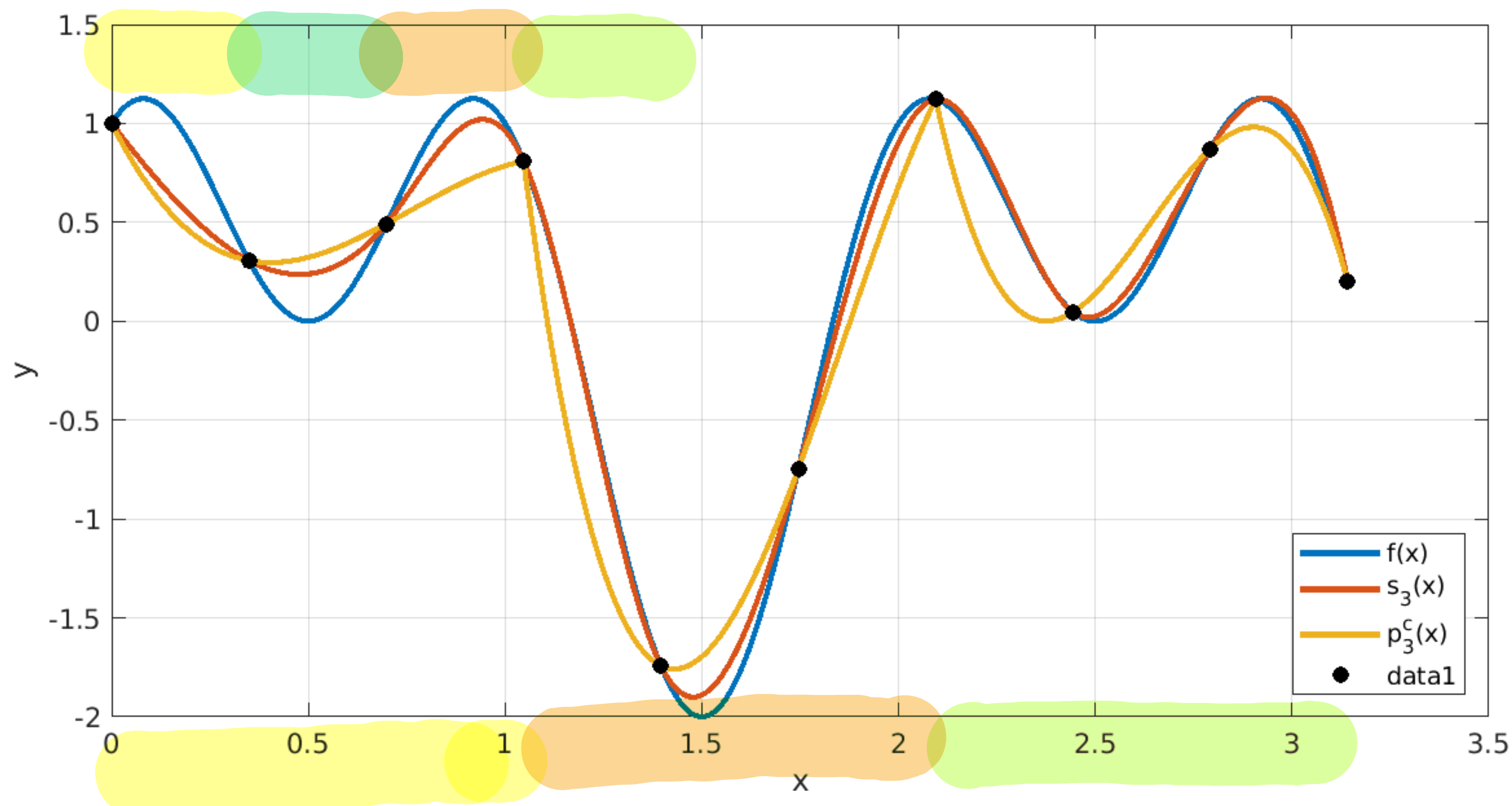
$$E_s(H) = \|f - s_3\|_\infty = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f(x) - s_3(x)| \le c_2 H^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

Se i nodi x_i sono equispaziati, allora $c_2 = 5/384$.



Confronto tra s_3 e p_3^c

s_3 = spline cubica, p_3^c interpolatore composito di Lagrange di grado 3.



p_3^c