

Corsi di laurea ETE-FM-INF Cognomi (M-Z)

Cognome e nome

Firma.....Matricola.....

Istruzioni

- (a). PROIBITO usare libri, quaderni, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch, cuffie, webcam e altri supporti.
- (b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti e questo foglio**. Verrà valutato lo svolgimento di ogni singolo esercizio e non solo il risultato.
- (c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log \left(1 + \frac{2}{n} \right).$$

[punti 2]**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + \arctan(7n) - \sin(n!)}{n! 4^n}$$

[punti 3]**Esercizio 3** Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (x-5)^2 \log(x-5) dx$$

[punti 2]**Esercizio 4** Calcolare la generica primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$$

Quindi calcolare l'area del trapezoide sotteso alla funzione $f(x)$ sull'intervallo $[0, \log 3]$.**[punti 3]**

Domanda 1

- (a). Scrivere la definizione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ e fare un disegno che ne chiarisca il significato.
- (b). Sia a_n una successione strettamente decrescente con valori $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte con un controesempio se la frase è falsa o con un procedimento logico basato su definizioni e teoremi se la frase è vera:
- (i) allora a_n è convergente,
 - (ii) allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.
- (c). Scrivere l'espressione generale della serie geometrica e caratterizzarla al variare del parametro q . Dimostrare il caso con $q > 1$.

Domanda 2

- (a). Scrivere la definizione di derivata prima in un punto x_0 e di funzione derivabile in un punto. Quindi dare l'interpretazione geometrica della derivata prima in un punto.
- (b). Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat dei punti stazionari.
- (c). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte con un controesempio se la frase è falsa o con un procedimento logico basato su definizioni e teoremi se la frase è vera:
- (i) se f è continua in x_0 allora f è derivabile in x_0 ,
 - (ii) se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo.

Domanda 3

- (a). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann. Scrivere la definizione di media integrale di f sull'intervallo $[a, b]$.
- (b). Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.
- (c). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte con un controesempio se la frase è falsa o con un procedimento logico basato su definizioni e teoremi se la frase è vera:
- (i) se $F(x)$ è una primitiva di una funzione f sull'intervallo I , allora anche $G(x) = 3F(x)$ è una primitiva della stessa funzione;
 - (ii) se $F(x)$ è una primitiva di una funzione f sull'intervallo I , allora anche $G(x) = F(x) - 3$ è una primitiva della stessa funzione;