

Corsi di laurea ETE-FM-INF Cognomi (M-Z)

Cognome e nome

Firma..... Matricola.....

Istruzioni

- (a). PROIBITO usare libri, quaderni, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch e altri supporti.
 - (b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti e questo foglio**. Verrà valutato lo svolgimento di ogni singolo esercizio e non solo il risultato.
 - (c). TEMPO a disposizione: 120 min.
-

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + 6n}.$$

[punti 3]

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) \frac{(n+2^{-n})}{n^3 + 1}.$$

[punti 2]

Esercizio 3 Calcolare l'integrale della funzione

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{5x^3 + 5x^2} dx.$$

[punti 2]

Esercizio 4 Dopo aver calcolato una primitiva generica della funzione

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)\sqrt{x-2}},$$

calcolare la media integrale di $f(x)$ sull'intervallo $[3, 5]$.

[punti 3]

Domanda 1

- (a). Sia $f : \text{dom}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di derivata prima di f in un punto $x_0 \in \text{dom}(f)$, specificando quando f è derivabile in x_0 .
Cosa rappresenta geometricamente $f'(x_0)$? Riportare un esempio grafico di una funzione (che non sia una retta) con $f'(1) = 2$.
- (b). Enunciare e dimostrare il teorema dei punti stazionari di Fermat.
- (c). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte con un controsenso o un procedimento logico basato su definizioni e teoremi:
- i) Una funzione continua in x_0 è anche derivabile in x_0 .
 - ii) Se x_0 è un punto di minimo relativo per f , allora $f'(x_0) = 0$.
 - iii) Se x_0 è un punto di minimo stazionario per f , allora f è convessa in x_0 .

Domanda 2

- (a). Scrivere la definizione di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e rappresentare graficamente la definizione.
Riportare un esempio di successione convergente.
- (b). Scrivere la definizione di serie numerica e definire la successione delle somme parziali (o ridotte) s_n .
- (c). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte con un controsenso o un procedimento logico basato su definizioni e teoremi:
- i) se la successione a_n è limitata, allora a_n è convergente;
 - ii) se la serie $\sum_{n \geq n_0} a_n$ è convergente, allora la successione s_n delle somme parziali è limitata.

Domanda 3

- (a). Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Scrivere la definizione di primitiva $F(x)$ di f sull'intervallo I e riportare un esempio di funzione f e di una sua primitiva.
- (b). Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.
- (c). Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- i) f ammette una primitiva sull'intervallo $[-1, 1]$?
- ii) f ammette una funzione integrale sull'intervallo $[-1, 1]$?
- iii) f è derivabile in $x_0 = 0$?

Motivare le risposte date.