Analisi Matematica 1 - Terza prova intermedia 14 gennaio 2025

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

---

Cognome e nome ........................................................................

Firma.................................... Matricola....................................

---

**Istruzioni**

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

---

**Esercizio 1** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{3}{2n\sqrt{n}}\right].$$

**[punti 2.5]**

---

**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha \in (1,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha^n+n^8\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\left[\frac{n+1}{6^n}-\log\left(1+\frac{n+1}{6^n}\right)\right].$$

**[punti 2.5]**

---

**Esercizio 3** Calcolare la media integrale della funzione

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{10x-1}}$$

sull'intervallo $\left[\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right]$.

**[punti 2.5]**

---

**Esercizio 4** Dopo aver calcolato una primitiva generica della funzione

$$f(x)=\log(2x)-2,$$

calcolare l'area del trapezoide sotteso ad $f(x)$ sull'intervallo $\left[\frac{1}{2},\frac{e^2}{2}\right]$.

**[punti 2.5]**

---

Rispondere alle seguenti domande.

**Domanda 1**

(a). Scrivere la definizione di punto di accumulazione per un insieme. Dire se i punti $x_0 = -\infty$ e $x_1 = 0$ sono di accumulazione per il dominio della funzione $f(x) = \log(x)$, giustificando le risposte. È possibile calcolare $\lim_{x \to -\infty} \log x$ e $\lim_{x \to 0^+} \log x$? Spiegare perché.

(b). Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite.

(c). Sia $f$ una qualsiasi funzione definita sull'intervallo $I = [2, 6]$ (cioè $I \subset dom(f)$). Sia poi $x_0 \in I$ ed esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Dire quale/i delle seguenti 2 affermazioni è/sono vera/e giustificando le risposte:

(i) allora $f$ è limitata su $I$;

(ii) allora $f$ è continua in $x_0$;

**Domanda 2**

(a). Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

(b). Dire se possiamo applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = |x - 1|$ sull'intervallo $[0, 4]$ e giustificare la risposta.

(c). Scrivere la definizione di funzione concava in un punto, riportare un esempio di funzione ($f(x) = ...$) concava su tutto il suo dominio e disegnarla.
Se una funzione $f$ è concava in ogni punto di un intervallo $I$ ed è derivabile due volte in $I$, cosa possiamo concludere riguardo al segno di $f''(x)$ nell'intervallo $I$?

**Domanda 3**

(a). Scrivere la definizione di serie numerica, definire la successione delle somme parziali (o ridotte) e dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata.

(b). Scrivere l'enunciato del criterio del confronto asintotico e riportare un esempio di applicazione.

(c). Sia $a_n$ una successione con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$ e convergente a $\ell = 1$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, divergente o indeterminata? Giustificare la risposta.

Analisi Matematica 1 - Terza prova intermedia 14 gennaio 2025

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

---

Cognome e nome ................................................................................

Firma ..................................... Matricola .....................................

---

**Istruzioni**

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

---

**Esercizio 1** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{5}{4n\sqrt{n}}\right].$$

**[punti 2.5]**

---

**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha \in (1,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha^n+n^7\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)\left[\frac{n+2}{5^n}-\log\left(1+\frac{n+2}{5^n}\right)\right].$$

**[punti 2.5]**

---

**Esercizio 3** Calcolare la media integrale della funzione

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{8x-1}}$$

sull'intervallo $\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$.

**[punti 2.5]**

---

**Esercizio 4** Dopo aver calcolato una primitiva generica della funzione

$$f(x)=\log(3x)-4,$$

calcolare l'area del trapezoide sotteso ad $f(x)$ sull'intervallo $\left[\frac{1}{3},\frac{e^4}{3}\right]$.

**[punti 2.5]**

---

Rispondere alle seguenti domande.

**Domanda 1**

(a). Scrivere la definizione di funzione monotona decrescente su un intervallo $I$. Riportare un esempio di funzione monotona decrescente sul suo dominio e disegnarla. Una funzione $f$ con $dom(f) = \mathbb{R}$ e decrescente su tutto il suo dominio può ammettere punti di minimo relativo o assoluto? Giustificare la risposta.

(b). Sia $f$ una qualsiasi funzione definita sull'intervallo $I = [0, 5]$ (cioè $I \subset dom(f)$) e ivi monotona crescente. Dire quale/i delle seguenti 2 affermazioni è/sono vera/e, giustificando le risposte:

(i) allora $f$ è integrabile secondo Riemann su $I$;

(ii) allora $f$ è continua su $I$;

(c). Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno.

**Domanda 2**

(a). Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

(b). Dire se possiamo applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x) = |x|$ sull'intervallo $[-1, 1]$ e giustificare la risposta.

(c). Scrivere la definizione di funzione convessa in un punto, riportare un esempio di funzione ($f(x) = ...$) convessa su tutto il suo dominio e disegnarla.
Se una funzione $f$ è convessa in ogni punto di un intervallo $I$ ed è derivabile due volte in $I$, cosa possiamo concludere riguardo al segno di $f''(x)$ nell'intervallo $I$?

**Domanda 3**

(a). Scrivere la definizione di serie numerica, definire la successione delle somme parziali (o ridotte) e dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata.

(b). Scrivere l'enunciato del criterio della convergenza assoluta e riportare un esempio di applicazione.

(c). Sia $a_n$ una successione infinitesima. Possiamo concludere che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente? Giustificare la risposta, e riportare degli esempi o controesempi.