ANALISI MATEMATICA 1 - APPELLO (SECONDA PARTE) 14 aprile 2025

Corso di laurea IFMLT-INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma .... Matricola ....

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(e^{1/3^n} - 1\right).$$

[punti 2]

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{n+6}}\right).$$

[punti 3]

Esercizio 3 Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{5\log(x)}{x\sqrt{6+\log^2(x)}}\,dx.$$

[punti 2]

Esercizio 4 Calcolare la media integrale della funzione

$$f(x) = \frac{5x-3}{x^2-3^2}$$

sull'intervallo $[0,2]$.

[punti 3]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

(a). Sia $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Scrivere la definizione di derivata prima di f in x_0 e di funzione derivabile in x_0.

(b). Cosa rappresenta geometricamente $f'(x_0)$? Illustrare la risposta con un esempio.

(c). Dimostrare che se f è derivabile nel punto x_0, allora f è continua in x_0.
Riportare un esempio di funzione continua in x_0, ma non derivabile in x_0.

(d). Scrivere l'enunciato del criterio del segno della derivata prima e mostrare come applicarlo alla funzione $f(x) = x^2$.

Domanda 2

(a). Scrivere la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ e riportare un esempio di successione convergente.

(b). Scrivere la definizione di serie numerica, definire la successione delle somme parziali (o ridotte) e dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata.

(c). Dire per quali valori del parametro $q \in \mathbb{R}$ la successione geometrica $a_n = q^n$ è convergente.

(d). Dire per quali valori del parametro $q \in \mathbb{R}$ la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ è convergente e dimostrarlo.

Domanda 3

(a). Sia $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivere la definizione di primitiva di f sull'intervallo I.

(b). Dimostrare che se F e G sono due primitive della stessa funzione f su I, allora F e G differiscono di una costante additiva.

(c). Sia $x_0 \in I$ e $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ la funzione integrale di f su I. Scrivere la definizione di $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ e dire cosa rappresenta.

(d). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare le risposte date:

(i) se f è continua su I, allora $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ è derivabile in I,

(ii) se f è continua su I, allora $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ è una primitiva di f,

(iii) se f è integrabile secondo Riemann su I, allora $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ è derivabile in I.