Analisi Matematica 1 - Appello (seconda parte) 14 gennaio 2025

Corso di laurea IFMLT-INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma.................................... Matricola......................................

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=8}^{+\infty} \frac{\sin(n^{n+1})}{(n^2-8)e^{8n}}.$$

[punti 2.5]

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+5}}\right)\right]^n (2^n\, n^n + 1 - n!)}{3^n + n^3}$$

[punti 2.5]

Esercizio 3 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^2 \frac{1-9x}{x^2+4}\, dx.$$

[punti 2.5]

Esercizio 4 Calcolare la primitiva $F(x)$ di

$$f(x) = \frac{\log(2x)\, \cos(\log(2x))}{x}$$

tale che $F\left(\frac{e^{\pi/2}}{2}\right) = 1$.

[punti 2.5]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

(a). Scrivere la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ e fare un disegno che ne chiarisca il significato.

(b). Scrivere l'espressione generale della successione geometrica e discutere il suo comportamento al variare del parametro. Quindi scrivere l'espressione generale della serie geometrica e caratterizzarla al variare del parametro.

(c). Sia a_n una successione strettamente decrescente con valori $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare le risposte date:

(i) allora a_n è convergente,

(ii) allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

Domanda 2

(a). Scrivere la definizione di derivata prima in un punto x_0 e di funzione derivabile in un punto. Quindi dare l'interpretazione geometrica della derivata prima in un punto.

(b). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Nel caso in cui siano vere enunciare e dimostrare il teorema relativo, altrimenti riportare un esempio che mostri che l'affermazione è falsa.

(i) se f è continua in x_0 allora f è derivabile in x_0,

(ii) se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0,

(iii) se f è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[0,1]$ allora f è derivabile in ogni punto dell'intervallo stesso.

Domanda 3

(a). Scrivere la definizione di primitiva $F(x)$ di una funzione $f(x)$ data. Dire se $F(x) = \sqrt[3]{x}$ può essere la primitiva di una qualche $f(x)$ sull'intervallo $I = [-1,1]$.

(b). Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

(c). Scrivere la definizione di funzione lipschitziana su un intervallo. Se f è lipschitziana su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora è anche integrabile secondo Riemann su $[a,b]$? Giustificare la risposta.