Analisi Matematica 1 - Appello (seconda parte) 5 febbraio 2025

Corso di laurea IFMLT-INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma.....................................Matricola......................................

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5e^n \log(n^n+7)}{n!+2}$$

[punti 2.]

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{e^n}\right)\left(n^4+4^{-n}\right)\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$$

al variare di $\alpha \in (0,+\infty)$.

[punti 3]

Esercizio 3 Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{x^2-x}{x+2}\,dx.$$

[punti 2.5]

Esercizio 4 Dopo aver calcolato la primitiva generica $F(x)$ di

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)+6}}$$

calcolare l'area della regione di piano sottesa ad f sull'intervallo $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

[punti 2.5]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

(a). Scrivere la definizione di punto stazionario, riportare un esempio di funzione ($f(x) =$ ...) che abbia in $x = 2$ un punto stazionario.

(b). Enunciare il teorema di Fermat dei punti stazionari e dimostrarlo.

(c). Sia f una funzione infinitesima per $x \to 0$ e sia $g(x) = \sin \frac{1}{x}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare le risposte date:

(i) allora esiste $\lim_{x \to 0}(f(x) \cdot g(x)) = 0$,

(ii) allora esiste $\lim_{x \to 0}(f(x) + g(x))$.

Domanda 2

(a). Scrivere la definizione di serie numerica, definire la successione delle somme parziali (o ridotte) e dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata.

(b). Scrivere l'enunciato del criterio di Leibniz e riportare un esempio di serie a cui possa essere applicato il criterio.

(c). Sia a_n una successione monotona decrescente limitata inferiormente. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare le risposte date:

(i) allora la successione a_n è convergente,

(ii) allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

Nel caso l'affermazione sia falsa riportare un esempio, altrimenti dire grazie a quale teorema si arriva alla conclusione (riportare solo il nome o l'enunciato del teorema senza la dimostrazione).

Domanda 3

(a). Scrivere la definizione di media integrale e darne l'interpretazione geometrica.

(b). Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

(c). Se f è derivabile su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a, b]$? Giustificare la risposta.