ANALISI MATEMATICA 1 - APPELLO 14 gennaio 2025

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma .... Matricola ....

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\arctan(|x|-6)\sqrt[3]{64-x^2}}{\arctan(x)+8}$$

Determinare il dominio di f.
[punti 1]

Determinare l'insieme $A = \{x \in dom(f) : f(x) \geq 0\}$.
[punti 3]

Esercizio 2 Tracciare il grafico di $f(x) = -e^x$, specificando il dominio e l'insieme immagine della funzione. Poi determinare i valori $x \in \mathrm{dom}(f)$ tali che $f(x) \leqslant -1$.
[punti 1]

Esercizio 3 Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\mathrm{Im}\left(\frac{6}{|z|^2+1}\left(\frac{e^{2i\pi}}{i} + i\overline{z} + 2(\overline{z}-z)\right)\right) \geqslant 0$$

e rappresentarlo nel piano complesso.

[punti 3]

Esercizio 4 Calcolare le soluzioni complesse dell'equazione

$$7z^3 - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = 0,$$

scriverle in forma esponenziale e rappresentarle nel piano complesso.

[punti 2]

Esercizio 5 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(5^{2n} - \sqrt[4]{n+1}\right)\left[\frac{n+1}{5^n} - \log\left(1+\frac{n+1}{5^n}\right)\right]}{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{n^n}}\right)\right)(n+1)^{n+2}}$$

[punti 2.5]

Esercizio 6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - \sin(3x) - 1}{\sinh(2x)} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x+25} - 5 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Sapendo che f è continua in $x = 0$ e senza calcolare l'espressione della funzione derivata prima per $x \neq 0$, studiare la derivabilità di f nel punto $x = 0$, classificando l'eventuale punto di non derivabilità.

[punti 2.5]

Esercizio 7 Sia data la funzione $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = 2\log(1 + \sin x)$$

Determinare il dominio di f e verificare che la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$.
[punti 1.5]

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
[punti 1]

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
[punti 1]

Limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, studiare la crescenza e decrescenza di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.
[punti 1.5]

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.
[punti 1]

Analisi Matematica 1 - Appello 14 gennaio 2025

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma .... Matricola ....

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\arctan(|x|-5)\sqrt[3]{49-x^2}}{\arctan(x)+7}$$

Determinare il dominio di f.
[punti 1]

Determinare l'insieme $A = \{x \in dom(f) : f(x) \geq 0\}$.
[punti 3]

Esercizio 2 Tracciare il grafico di $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, specificando il dominio e l'insieme immagine della funzione. Poi determinare i valori $x \in \mathrm{dom}(f)$ tali che $f(x) \leqslant -1$.
[punti 1]

Esercizio 3 Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\mathrm{Im}\left(\frac{5}{|z|^2+2}\left(\frac{e^{4i\pi}}{i} + i\overline{z} + 3(\overline{z}-z)\right)\right) \geqslant 0$$

e rappresentarlo nel piano complesso.

[punti 3]

Esercizio 4 Calcolare le soluzioni complesse dell'equazione

$$6z^3 - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}} = 0,$$

scriverle in forma esponenziale e rappresentarle nel piano complesso.

[punti 2]

Esercizio 5 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(6^{2n} - \sqrt[4]{n+2}\right)\left[\frac{n+2}{6^n} - \log\left(1 + \frac{n+2}{6^n}\right)\right]}{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{3\sqrt{n^n}}\right)\right)(n+2)^{n+2}}$$

[punti 2.5]

Esercizio 6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{5x} - \sin(5x) - 1}{\sinh(4x)} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x+16} - 4 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Sapendo che f è continua in $x = 0$ e senza calcolare l'espressione della funzione derivata prima per $x \neq 0$, studiare la derivabilità di f nel punto $x = 0$, classificando l'eventuale punto di non derivabilità.

[punti 2.5]

Esercizio 7 Sia data la funzione $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = 4\log(1 + \sin x)$$

Determinare il dominio di f e verificare che la funzione è periodica di periodo $T = 2\pi$.
[punti 1.5]

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
[punti 1]

Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
[punti 1]

Limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, studiare la crescenza e decrescenza di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.
[punti 1.5]

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.
[punti 1]
