Analisi Matematica 1 - Appello (seconda parte) 8 luglio 2024

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome ....

Firma.......................................Matricola...

Istruzioni

(a). PROIBITO usare libri, quaderni, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch e altri supporti.

(b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.

(c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^{1/3}$$

[punti 2]

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

[punti 2.5]

Esercizio 3 Sia

$$f(x) = 2x\sqrt{x^2+1},$$

dopo aver calcolato $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, calcolare l'area del trapezoide sotteso alla funzione $f(x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

[punti 2.5]

Esercizio 4 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 3}{\sin x + 1} \cos x \, dx$$

[punti 3]

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

(a). Scrivere la definizione di punto di massimo relativo per una funzione f.

(b). Scrivere la definizione di punto stazionario per f.

(c). Un punto di massimo relativo è sempre anche un punto stazionario? Giustificare la risposta e riportare un esempio.

(d). Enunciare il teorema di Lagrange e dimostrarlo.

Domanda 2

(a). Scrivere la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e rappresentare graficamente quanto scritto nella definizione.

(b). Enunciare il teorema della permanenza del segno e riportare la dimostrazione.

(c). Dire se la seguente proposizione è vera per ogni funzione $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
"Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, allora f è continua in x_0."
Se la risposta è positiva, riportare l'enunciato del teorema che lo afferma, se la risposta è negativa, riportare un esempio che giustifichi la risposta data.

Domanda 3

(a). Scrivere la definizione di serie numerica.

(b). Scrivere cos'è la successione delle somme parziali (o ridotte) e dare la definizione di serie convergente, divergente, indeterminata riportando un esempio per ogni caso.

(c). Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: "Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$". Se si ritiene che sia vera, riportare l'enunciato del teorema che lo afferma, altrimenti mostrare un esempio che l'enunciato è falso.

(d). Enunciare il criterio di Leibniz. Quindi riportare un esempio che soddisfa le ipotesi (e quindi anche la tesi) del criterio e un esempio che non soddisfa le ipotesi del criterio.