

Corso di laurea INFLT-ETELT Cognomi (M-Z)

Cognome e nome

Firma.....Matricola.....

Istruzioni

- (a). PROIBITO usare libri, quaderni, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari, smartphone, smartwatch e altri supporti.
- (b). CONSEGNARE **tutti i fogli su cui sono stati eseguiti i conti**.
- (c). TEMPO a disposizione: 120 min.

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} + n^7) [\log(1 + e^{2n}) - 2n]$$

[punti 2.5]**Esercizio 2** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{1 - \cos\left(\frac{3}{n}\right)}$$

[punti 2.5]**Esercizio 3** Dopo aver disegnato le due funzioni

$$f(x) = 3 \cos(x) \quad \text{e} \quad g(x) = 3 \sin(x)$$

calcolare l'area della regione di piano compresa tra i relativi grafici sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.**[punti 2.5]****Esercizio 4** Determinare la primitiva $G: (-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = \frac{\log(x+5)}{(x+5)^2}$$

tale che $G(-4) = 4$.**[punti 2.5]**

Rispondere alle seguenti domande.

Domanda 1

- (a). Scrivere la definizione di punto di minimo relativo per una funzione f .
- (b). Scrivere la definizione di punto stazionario per f .
- (c). Un punto di minimo relativo è sempre anche un punto stazionario? Giustificare la risposta e riportare un esempio.
- (d). Enunciare il teorema dei punti stazionari di Fermat e dimostrarlo.

Domanda 2

- (a). Sia a_n una successione a valori reali. Scrivere la definizione di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e rappresentare graficamente quanto scritto nella definizione.
- (b). Dimostrare il teorema che garantisce che se una successione è convergente allora è anche limitata.
- (c). Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: “Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ”. Se si ritiene che sia vera, riportare l’enunciato del teorema che lo afferma, altrimenti riportare un esempio che mostri che l’enunciato è falso.

Domanda 3

- (a). Scrivere la definizione di primitiva di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b). Scrivere la definizione di funzione integrale di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c). Scrivere l’enunciato del primo teorema fondamentale del calcolo integrale.
- (d). Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & \text{se } 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

f ammette una funzione integrale sull’intervallo $[0, 1]$? Giustificare la risposta. Se la funzione integrale esiste, questa è anche una primitiva di f ? Giustificare la risposta.