ANALISI MATEMATICA A - 29 marzo 2010 - Allievi AUTLT - INFLT - CIVLT - AMBLT - GESTLT - MECLT - MATLT

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio 1 ed è pari al valore costante sommato al termine $\frac{x|x|-1}{x+1}$ nella definizione di $f(x)$.

Fila 1

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 1 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+2$ è asintoto obliquo sinistro, $x=-1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

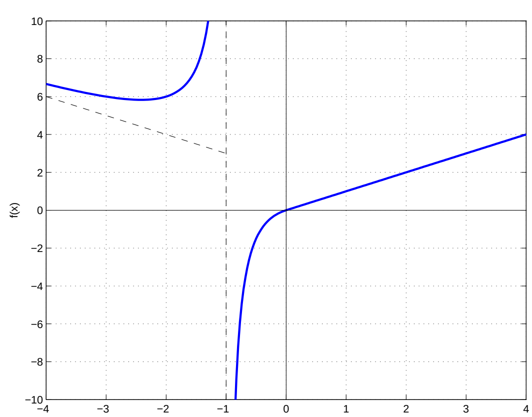
(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x=0$ e $f'(0)=1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2},-1)\cup(-1,+\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty,-1-\sqrt{2})$;
$x=-1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x<0$, visto che f è una retta per $x>0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty,-1)$ e strettamente concava in $(-1,0)$.



2. $\sup A = \max A = 3\arctan(\log 2)$, $\inf A = -\dfrac{3}{2}\pi$

3. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/2 + i0$ e raggio $r = 1/2$, privata del punto $0 + i0$.

4. $w = -2^6$.

5. Il limite è $\ell = 4$.

6. La derivata è

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{2(2+e^{2x})\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

7. f è discontinua sia in $x = 0$ che in $x = 1$, in particolare in $x = 0$ si ha una discontinuità eliminabile, mentre in $x = 1$ si ha un punto di salto.

8. Il limite è $\ell = 1/2$

Fila 2

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 2 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x + 3$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^\pm$.
Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. $\sup A = \max A = 5\arctan(\log 3)$, $\inf A = -\dfrac{5}{2}\pi$

3. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/4 + i0$ e raggio $r = 1/4$, privata del punto $0 + i0$.

4. $w = -3^6$.

5. Il limite è $\ell = 6$.

6. La derivata è

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}}{2(2+e^{3x})\sqrt{e^{3x}+1}}.$$

7. f è discontinua sia in $x = 0$ che in $x = 2$, in particolare in $x = 0$ si ha una discontinuità eliminabile, mentre in $x = 2$ si ha un punto di salto.

8. Il limite è $\ell = 1/3$

Fila 3

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 3 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+4$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^\pm$.
Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2},-1) \cup (-1,+\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty,-1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty,-1)$ e strettamente concava in $(-1,0)$.

2. $\sup A = \max A = 7\arctan(\log 4)$, $\inf A = -\dfrac{7}{2}\pi$

3. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/6 + i0$ e raggio $r = 1/6$, privata del punto $0 + i0$.

4. $w = -4^6$.

5. Il limite è $\ell = 8$.

6. La derivata è

$$f'(x) = \frac{4e^{4x}}{2(2+e^{4x})\sqrt{e^{4x}+1}}.$$

7. f è discontinua sia in $x = 0$ che in $x = 3$, in particolare in $x = 0$ si ha una discontinuità eliminabile, mentre in $x = 3$ si ha un punto di salto.

8. Il limite è $\ell = 1/4$

Fila 4

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 4 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+5$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^\pm$.
Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. $\sup A = \max A = 9\arctan(\log 5)$, $\inf A = -\dfrac{9}{2}\pi$

3. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/8 + i0$ e raggio $r = 1/8$, privata del punto $0 + i0$.

4. $w = -5^6$.

5. Il limite è $\ell = 10$.

6. La derivata è

$$f'(x) = \frac{5e^{5x}}{2(2+e^{5x})\sqrt{e^{5x}+1}}.$$

7. f è discontinua sia in $x = 0$ che in $x = 4$, in particolare in $x = 0$ si ha una discontinuità eliminabile, mentre in $x = 4$ si ha un punto di salto.

8. Il limite è $\ell = 1/5$

Fila 5

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{x+1} + 5 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x+6$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^\pm$.
Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. $\sup A = \max A = 11 \arctan(\log 6)$, $\inf A = -\dfrac{11}{2}\pi$

3. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/10 + i0$ e raggio $r = 1/10$, privata del punto $0 + i0$.

4. $w = -6^6$.

5. Il limite è $\ell = 12$.

6. La derivata è

$$f'(x) = \frac{6e^{6x}}{2(2+e^{6x})\sqrt{e^{6x}+1}}.$$

7. f è discontinua sia in $x = 0$ che in $x = 5$, in particolare in $x = 0$ si ha una discontinuità eliminabile, mentre in $x = 5$ si ha un punto di salto.

8. Il limite è $\ell = 1/6$

Fila 6

1. (a) $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Per la definizione di modulo si ha

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2 - 1}{x+1} + 6 & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è una retta per $x \geq 0$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. $y = -x + 7$ è asintoto obliquo sinistro, $x = -1$ è asintoto verticale completo. Non ci sono asintoti orizzontali.

(c)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo limiti destro e sinistro della derivata per $x \to 0^{\pm}$.
Si ha $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$, quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 1$ e $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$. Non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f strettamente crescente in $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, +\infty)$; f strettamente decrescente in $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$;
$x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo stazionario. Non esistono punti di massimo/minimo assoluto in quanto f è illimitata.

(e) Calcoliamo $f''(x)$ solo per $x < 0$, visto che f è una retta per $x > 0$. Si ha $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x)^3}$.
Non esistono flessi. f è strettamente convessa in $(-\infty, -1)$ e strettamente concava in $(-1, 0)$.

2. $\sup A = \max A = 13 \arctan(\log 7)$, $\inf A = -\dfrac{13}{2}\pi$

3. L'insieme delle soluzioni è la circonferenza di centro $z_0 = 1/12 + i0$ e raggio $r = 1/12$, privata del punto $0 + i0$.

4. $w = -7^6$.

5. Il limite è $\ell = 14$.

6. La derivata è

$$f'(x) = \frac{7e^{7x}}{2(2 + e^{7x})\sqrt{e^{7x} + 1}}.$$

7. f è discontinua sia in $x = 0$ che in $x = 6$, in particolare in $x = 0$ si ha una discontinuità eliminabile, mentre in $x = 6$ si ha un punto di salto.

8. Il limite è $\ell = 1/7$
