ANALISI MATEMATICA A - 3 settembre 2009

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio n° 6 ed è il valore sottratto al parametro α.

Fila 1

1. (a) $\mathrm{dom} f =]0, e^{-2}[\cup]e^{-2}, +\infty[$, non ci sono simmetrie.

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^{-2-}} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-2+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $x = e^{-2}$ asintoto verticale destro, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) $f'(x) = -f(x)\,\frac{1}{x(\log x+2)^2}$, $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$, non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f sempre decrescente nel suo dominio; notare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^{-2-}} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-2+}} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
non ci sono punti di massimo o di minimo; la funzione è limitata inferiormente, il suo inf è 0, ma non è minimo; la funzione è illimitata superiormente.

(e)
$$f''(x) = f(x)\,\frac{1}{x^2(\log x+2)^2}\left[\frac{1}{\log x+2}+1\right]^2,$$
f convessa nel suo dominio, non ci sono punti di flesso.

2. La sottosuccessione per n pari è decrescente, la sottosuccessione per n dispari è crescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 - 10y - 4x - 4 = 0$

4. 0, $\sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, -$\sqrt[3]{2}i$

5. $\ell = 0$

6. continua in $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 1$ (in tal caso non derivabile, punto di cuspide), altrimenti discontinuità eliminabile; in $\frac{3}{2}\pi$ discontinuità eliminabile; f è derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

7. $\ell = e^2 \log \frac{3}{2}$

Fila 2

1. (a) $\mathrm{dom} f =]0, e^{-3}[\cup]e^{-3}, +\infty[$, non ci sono simmetrie.

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^{-3-}} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-3+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $x = e^{-3}$ asintoto verticale destro, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) $f'(x) = -f(x)\,\frac{1}{x(\log x+3)^2}$, $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$, non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f sempre decrescente nel suo dominio; notare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^{-3-}} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-3+}} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
non ci sono punti di massimo o di minimo; la funzione è limitata inferiormente, il suo inf è 0, ma non è minimo; la funzione è illimitata superiormente.

(e)

$$f''(x) = f(x)\,\frac{1}{x^2(\log x+3)^2}\left[\frac{1}{\log x+3}+1\right]^2,$$

f convessa nel suo dominio, non ci sono punti di flesso.

2. La sottosuccessione per n pari è decrescente, la sottosuccessione per n dispari è crescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 - 10y - 6x + 1 = 0$

4. 0, $\sqrt[3]{5}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{5}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $-\sqrt[3]{5}i$

5. $\ell = 0$

6. continua in $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 2$ (in tal caso non derivabile, punto di cuspide), altrimenti discontinuità eliminabile; in $\frac{3}{2}\pi$ discontinuità eliminabile; f è derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

7. $\ell = e^3 \log \frac{5}{2}$

Fila 3

1. (a) $\mathrm{dom} f =]0, e^{-4}[\cup]e^{-4}, +\infty[$, non ci sono simmetrie.

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^{-4-}} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-4+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $x = e^{-4}$ asintoto verticale destro, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) $f'(x) = -f(x)\,\frac{1}{x(\log x+4)^2}$, $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$, non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f sempre decrescente nel suo dominio; notare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^{-4-}} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-4+}} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
non ci sono punti di massimo o di minimo; la funzione è limitata inferiormente, il suo inf è 0, ma non è minimo; la funzione è illimitata superiormente.

(e)

$$f''(x) = f(x)\,\frac{1}{x^2(\log x+4)^2}\left[\frac{1}{\log x+4}+1\right]^2,$$

f convessa nel suo dominio, non ci sono punti di flesso.

2. La sottosuccessione per n pari è decrescente, la sottosuccessione per n dispari è crescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 - 10y - 8x + 8 = 0$

4. 0, $\sqrt[3]{10}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $-\sqrt[3]{10}i$

5. $\ell = 0$

6. continua in $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 3$ (in tal caso non derivabile, punto di cuspide), altrimenti discontinuità eliminabile; in $\frac{3}{2}\pi$ discontinuità eliminabile; f è derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

7. $\ell = e^4 \log \frac{7}{2}$

Fila 4

1. (a) $\mathrm{dom} f =]0, e^{-5}[\cup]e^{-5}, +\infty[$, non ci sono simmetrie.

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^{-5}-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-5}+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $x = e^{-5}$ asintoto verticale destro, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) $f'(x) = -f(x)\,\frac{1}{x(\log x+5)^2}$, $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$, non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f sempre decrescente nel suo dominio; notare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^{-5}-} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-5}+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$
non ci sono punti di massimo o di minimo; la funzione è limitata inferiormente, il suo inf è 0, ma non è minimo; la funzione è illimitata superiormente.

(e)
$$f''(x) = f(x)\,\frac{1}{x^2(\log x+5)^2}\left[\frac{1}{\log x+5}+1\right]^2,$$
f convessa nel suo dominio, non ci sono punti di flesso.

2. La sottosuccessione per n pari è decrescente, la sottosuccessione per n dispari è crescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 - 10y - 10x + 17 = 0$

4. 0, $\sqrt[3]{17}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{17}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, -$\sqrt[3]{17}i$

5. $\ell = 0$

6. continua in $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 4$ (in tal caso non derivabile, punto di cuspide), altrimenti discontinuità eliminabile; in $\frac{3}{2}\pi$ discontinuità eliminabile; f è derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

7. $\ell = e^5 \log \frac{9}{2}$

Fila 5

1. (a) $\mathrm{dom} f =]0, e^{-6}[\cup]e^{-6}, +\infty[$, non ci sono simmetrie.

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^{-6}-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-6}+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $x = e^{-6}$ asintoto verticale destro, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) $f'(x) = -f(x)\,\frac{1}{x(\log x+6)^2}$, $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$, non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f sempre decrescente nel suo dominio; notare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^{-6}-} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-6}+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$
non ci sono punti di massimo o di minimo; la funzione è limitata inferiormente, il suo inf è 0, ma non è minimo; la funzione è illimitata superiormente.

(e)
$$f''(x) = f(x)\,\frac{1}{x^2(\log x+6)^2}\left[\frac{1}{\log x+6}+1\right]^2,$$
f convessa nel suo dominio, non ci sono punti di flesso.

2. La sottosuccessione per n pari è decrescente, la sottosuccessione per n dispari è crescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 - 10y - 12x + 28 = 0$

4. 0, $\sqrt[3]{26}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{26}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, -$\sqrt[3]{26}i$

5. $\ell = 0$

6. continua in $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 5$ (in tal caso non derivabile, punto di cuspide), altrimenti discontinuità eliminabile; in $\frac{3}{2}\pi$ discontinuità eliminabile; f è derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

7. $\ell = e^6 \log \frac{11}{2}$

Fila 6

1. (a) $\mathrm{dom} f =]0, e^{-7}[\cup]e^{-7}, +\infty[$, non ci sono simmetrie.

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to e^{-7-}} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-7+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $x = e^{-7}$ asintoto verticale destro, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(c) $f'(x) = -f(x)\,\frac{1}{x(\log x+7)^2}$, $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$, non ci sono punti di non derivabilità.

(d) f sempre decrescente nel suo dominio; notare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to e^{-7-}} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{-7+}} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
non ci sono punti di massimo o di minimo; la funzione è limitata inferiormente, il suo inf è 0, ma non è minimo; la funzione è illimitata superiormente.

(e)

$$f''(x) = f(x)\,\frac{1}{x^2(\log x + 7)^2}\left[\frac{1}{\log x + 7} + 1\right]^2,$$

f convessa nel suo dominio, non ci sono punti di flesso.

2. La sottosuccessione per n pari è decrescente, la sottosuccessione per n dispari è crescente. Applicando il teorema delle successioni monotone alle due sottosuccessioni ed unendo i risultati ottenuti, si ha: $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 - 10y - 14x + 41 = 0$

4. 0, $\sqrt[3]{37}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{37}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, -$\sqrt[3]{37}i$

5. $\ell = 0$

6. continua in $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha = 6$ (in tal caso non derivabile, punto di cuspide), altrimenti discontinuità eliminabile; in $\frac{3}{2}\pi$ discontinuità eliminabile; f è derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

7. $\ell = e^7 \log \frac{13}{2}$
