I POLINOMI DI TAYLOR

Brook Taylor (1685 – 1731) matematico inglese

A cosa servono?

- Per calcolare e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$ con una calcolatrice o con un computer,
- per risolvere limiti complessi che portano a forme $\frac{0}{0}$ del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+2x)) - e^{2x} + 1}{\tan x^2} = \frac{0}{0},$$

in cui il Teorema di de l'Hôpital e i limiti fondamentali non sono di molto aiuto,

L'idea di Taylor: APPROSSIMARE le funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche, irrazionali, etc, con dei polinomi, partendo dai valori noti di f e delle sue derivate in un punto x_0 particolare.

Polinomio di Taylor

Sia f definita in un intorno di x_0, continua e derivabile $n \geq 0$ volte in x_0. Voglio costruire un polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che condivide con f i valori di tutte le derivate nel punto x_0 fino all'ordine n, cioè:

$$\begin{array}{rcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n'(x_0) & = & f'(x_0) \\ p_n''(x_0) & = & f''(x_0) \\ p_n^{(3)}(x_0) & = & f^{(3)}(x_0) \\ \dots & = & \dots \\ p_n^{(n)}(x_0) & = & f^{(n)}(x_0) \end{array}$$

Questo polinomio esiste unico, è detto polinomio di Taylor $p_n(x)$ di f centrato in x_0 ed ha grado n ed è così definito:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Si ricorda che $f^{(0)}(x) = f(x)$, cioè la derivata di ordine 0 è la funzione stessa.

Calcoliamo un polinomio di Taylor

$f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$, $n \geq 0$

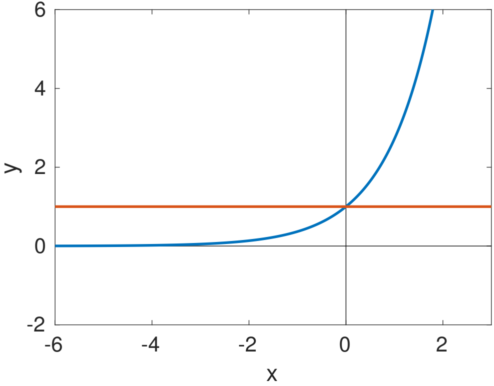
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

$$
\begin{array}{ll}
n = 0 & p_0(x) = f(x_0) = f(0) = 1 \\
n = 1 & p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x \\
n = 2 & p_2(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 \\
n = 3 & p_3(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 \\
n > 3 & p_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}
\end{array}
$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

$$p_0(x) = 1 \qquad \text{(costante che interseca } f(x) \text{ in } x_0 = 0)$$

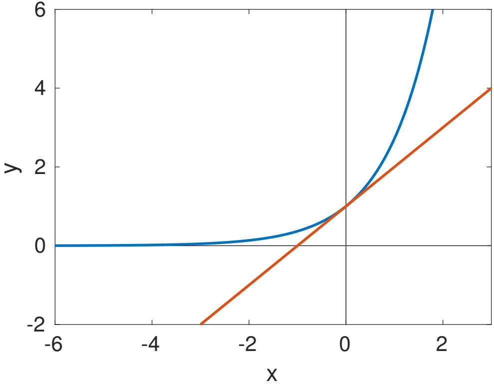


Si ha: $\boxed{f(0) = p_0(0)}$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

$$p_1(x) = 1 + x \qquad \text{(tangente ad } f(x) \text{ in } x_0 = 0)$$

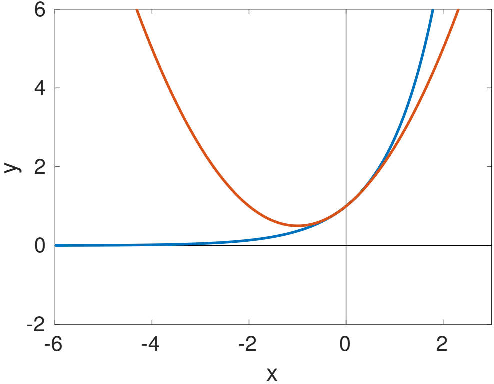


Si ha: $\boxed{f(0) = p_1(0)}$, $\boxed{f'(0) = p_1'(0)}$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

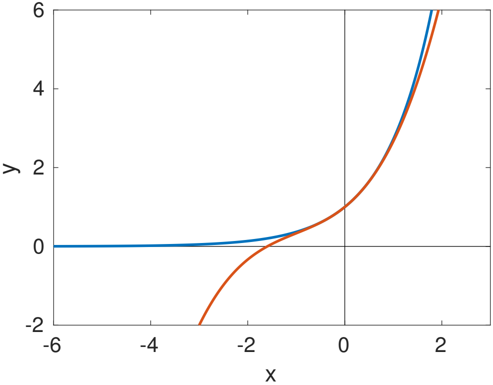
$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$



Si ha: $\boxed{f(0) = p_2(0)}$, $\boxed{f'(0) = p_2'(0)}$, $\boxed{f''(0) = p_2''(0)}$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

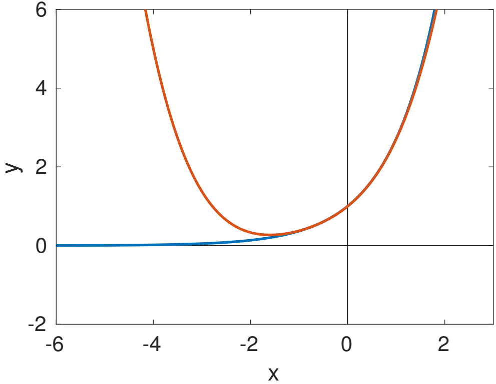
$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$



Si ha: $f(0) = p_3(0)$, $f'(0) = p_3'(0)$, $f''(0) = p_3''(0)$, $f^{(3)}(0) = p_3^{(3)}(0)$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

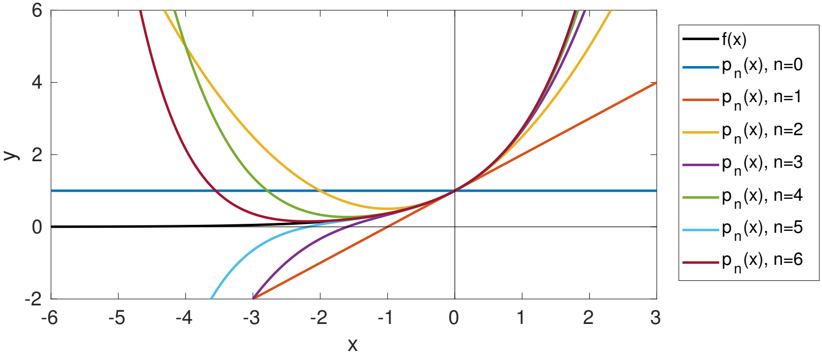
$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$



Si ha: $\boxed{f(0) = p_4(0)}$, $\boxed{f'(0) = p_4'(0)}$, $\boxed{f''(0) = p_4''(0)}$,
$\boxed{f^{(3)}(0) = p_4^{(3)}(0)}$, $\boxed{f^{(4)}(0) = p_4^{(4)}(0)}$,

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo vari polinomi: $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$:

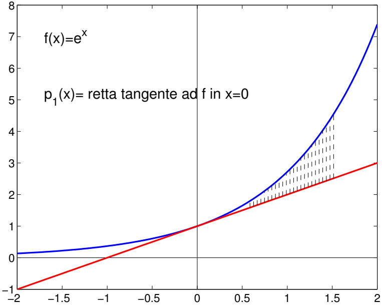
$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$



Errore di approssimazione, resto di Taylor

Dati f, x_0, n e $x \in I(x_0)$

QUANTO $p_n(x)$ APPROSSIMA BENE $f(x)$?



$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ è il RESTO di Taylor di ordine n nel punto x

$r_n(x)$ è tanto più piccolo quanto più x è vicino a x_0, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} r_n(x) = 0$$

Teorema (sviluppo di Taylor, con resto di Peano)

Teorema. Sia f definita in $I(x_0)$. Sia $n \geq 0$ e sia f continua e derivabile n volte in x_0. Sia

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0 e sia

$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ il resto di ordine n, con $x \in I(x_0)$.

Allora $\boxed{r_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0}$.

Osservazione. Segue che

$$f(x) = p_n(x) + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0.$$

$r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ è detto resto nella forma di Peano

Teorema (di Taylor, resto di Lagrange)

Teorema. Sia f continua e derivabile n volte in x_0 con derivata n-sima continua. Sia inoltre derivabile $n+1$ volte in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Sia $p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ il il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0, allora $\exists\ \xi$ tra x e x_0:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ e}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

$r_n(x)$ è detto resto nella forma di Lagrange.

Sviluppi di Maclaurin

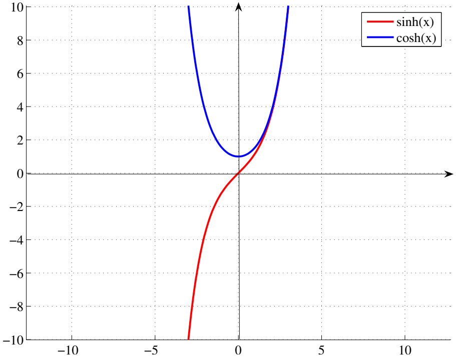
Se $x_0 = 0$ lo sviluppo di Taylor prende il nome di sviluppo di Maclaurin e diventa

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

Funzioni iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



La relazione fondamentale tra sinh e cosh è:

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

$\sinh(\theta)$ e $\cosh(\theta)$ sono dette funzioni iperboliche perchè un punto $P = (x_P, y_P)$ del piano cartesiano con $x_P = \cosh(\theta)$ e $y_P = \sinh(\theta)$, al variare di θ appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

Si ha: $D(\sinh(\theta)) = \cosh(\theta)$ e $D(\cosh(\theta)) = \sinh(\theta)$,
o equivalentemente:
$D(\sinh(x)) = \cosh(x)$ e $D(\cosh(x)) = \sinh(x)$

Inoltre, dalla definizione si ottiene:

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sviluppi di Maclaurin notevoli

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

dove

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \forall\alpha \in \mathbb{R}, \ n \geq 1$$

Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)}$ sfruttando i polinomi di Taylor.

Il limite deve essere calcolato per $x \to 0$, quindi posso usare gli sviluppi di MacLaurin.

$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) - 1}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x + o(x)}{x - o(x)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Canuto Tabacco, Cap. 7.

Esercizi: Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 2 delle seguenti funzioni nell'intorno del punto x_0 riportato:

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \log(x)$, $x_0 = 2$
3. $f(x) = x\log(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = \tan(x)$, $x_0 = \pi/3$
5. $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = -1$

Esercizi: Si possono svolgere tutti i limiti che compaiono nei temi d'esame degli anni precedenti. La maggior parte di essi richiede l'uso dei polinomi di Taylor. Alcuni limiti richiedono anche l'impiego del Teorema di de l'Hôpital.