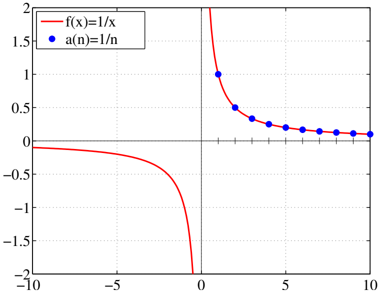
SUCCESSIONI

e

LIMITI DI SUCCESSIONI



Successioni

Def. Una **successione** è una funzione reale a variabile naturale:

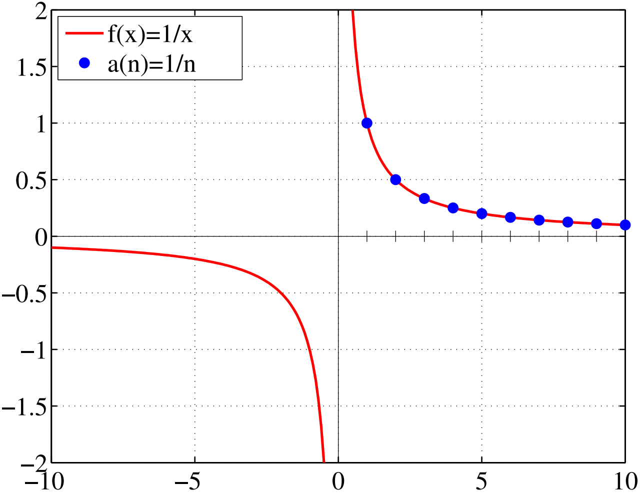
$$a : \mathrm{dom}(a) \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \quad n \mapsto y = a(n) = a_n.$$

La variabile indipendente è scelta in $\mathbb{N}$ e non in $\mathbb{R}$.
Il **dominio** di una successione è del tipo $\{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ con n_0 un opportuno numero naturale.

Es. $a_n = \dfrac{1}{n}$, in questo caso $n_0 = 1$.
Es. $a_n = \dfrac{n+1}{n-2}$, in questo caso $n_0 = 3$.
Es. $a_n = (-1)^n$, in questo caso $n_0 = 0$.

Es. Il fattoriale di n: $\quad a_n = n!,\ n \in \mathbb{N}$.
$0! = 1,\ \ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$
Vale la proprietà ricorsiva: $n! = n \cdot (n-1)!$

Confronto tra $f(x) = 1/x$ e $a_n = 1/n$



$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}, \qquad \mathrm{dom}(a) = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$

Dove sono utili le successioni

Esempio: stima del costo computazionale di algoritmi.

Per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) servono:

oper. elementari	metodo
$c_n = 3(n+1)!$	Cramer
$g_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$	Eliminazione di Gauss

Quale dei due metodi è più efficiente?

Come crescono i costi quando n cresce?

c_n e g_n sono due successioni,

n è un numero intero positivo (cioè un naturale) e NON ha senso parlare di dimensione del sistema $n \in \mathbb{R}$

Richiami

Ricordiamo la definizione di Punto di accumulazione.
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è un **punto di accumulazione per** A se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0.
Se $A \equiv \mathbb{R}$, allora un qualsiasi punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (finito o infinito) è di accumulazione per $\mathbb{R}$.

ma se $A = \mathbb{N}$, L'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$

Ricordiamo che una successione è una funzione il cui dominio è contenuto nell'insieme dei numeri naturali:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \qquad a : n \mapsto y = a_n$$

$$\boxed{\text{In conclusione, l'unico limite che possiamo calcolare sulle successioni è per } n \to \infty}$$

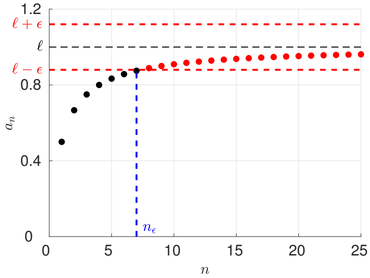
Successioni convergenti

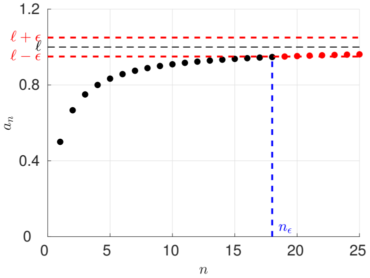
Def. La successione $a : n \mapsto a_n$, definita per $n \geq n_0$, **tende al limite** $\ell \in \mathbb{R}$ (o **converge al limite** $\ell \in \mathbb{R}$) e si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \ell}$$

se $\forall I_\varepsilon(\ell),\ \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) :\ \forall n \geq n_0,\ n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(\ell)$

(o se $\forall \varepsilon > 0$ (ε reale), $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0,\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$)





Def. Una successione convergente a $\ell = 0$ si dice **infinitesima**.

Es. $a_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Questa è una succ. infinitesima (= convergete a zero)

Es. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Questa è una succ. convergente (ma non infinitesima)

Es. $a_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2+2n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2+2n} = \frac{3}{5}$$

Questa è una succ. convergente

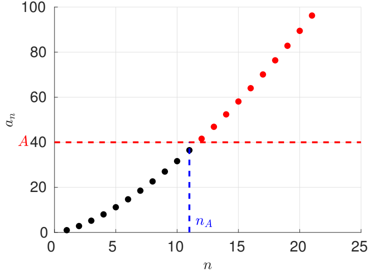
Successioni divergenti positivamente

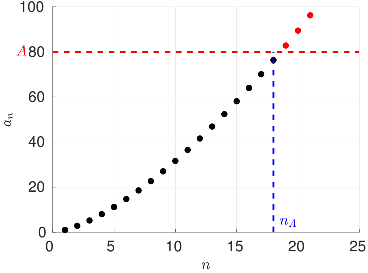
Def. La successione $a : n \mapsto a_n$ **tende** a $+\infty$ (o **diverge** a $+\infty$) e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

se $\forall I_A(+\infty),\ \exists I_{n_A}(+\infty) :\ \forall n \geq n_0,\ n \in I_{n_A}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_A(+\infty)$

(o se $\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_A \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0,\ n > n_A \Rightarrow a_n > A$)





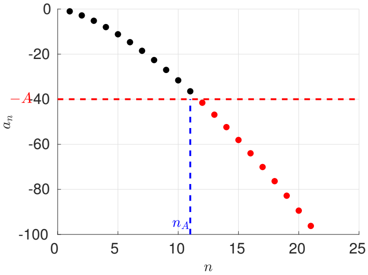
Successioni divergenti negativamente

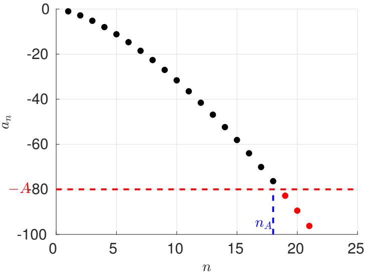
Def. La successione $a : n \mapsto a_n$ **tende** a $-\infty$ (o **diverge** a $-\infty$) e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

se $\forall I_A(-\infty),\ \exists I_{n_A}(+\infty) :\ \forall n \geq n_0,\ n \in I_{n_A}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_A(-\infty)$

(o se $\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_A \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0,\ n > n_A \Rightarrow a_n < -A$)





Classificazione di successioni

Una successione può essere:

- CONVERGENTE se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ finito
- DIVERGENTE POSITIVAMENTE se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- DIVERGENTE NEGATIVAMENTE se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- INDETERMINATA se $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.

Es. La successione

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$$

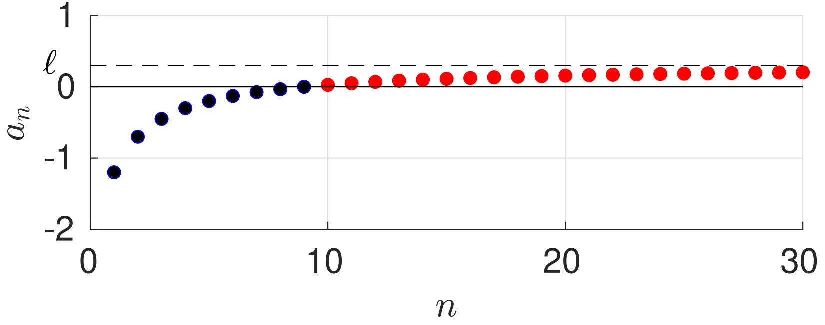
è indeterminata.

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONE

Valgono tutti i teoremi visti per i limiti di funzione, ovviamente adattati alle successioni.

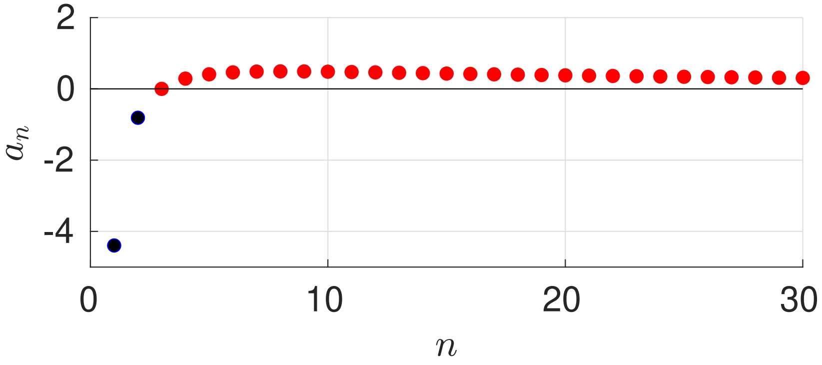
Teorema di unicità del limite. Se esiste $\lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, allora questo è unico.

Teorema di permanenza del segno. Sia $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\ell > 0$ allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \overline{n}$.



Corollario al teorema di permanenza del segno. Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Se esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq \overline{n}$, allora $\ell \geq 0$.

Esempio: $a_n = 4\dfrac{\log(n/3)}{n}$



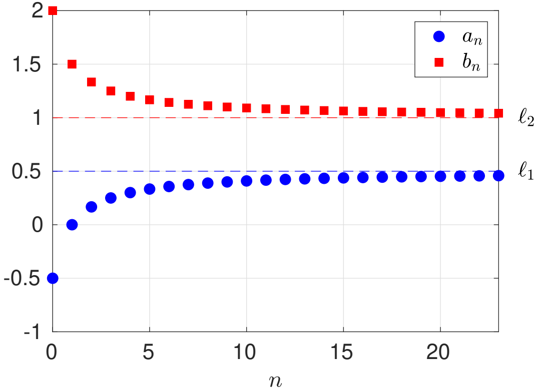
Primo teorema del confronto

Siano a_n e b_n due successioni tali che:

– esistono $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$,

– esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq \overline{n}$.

Allora $\ell_1 \leq \ell_2$.



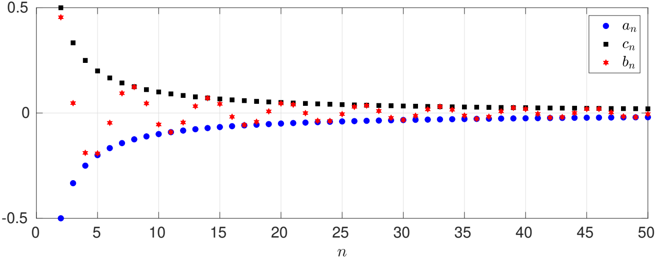
Secondo teorema del confronto

Siano a_n, b_n e c_n tre successioni tali che:

– $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

– $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \geq \overline{n}$.

Allora esiste $\lim_{n\to\infty} b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.



Teorema dell'algebra dei limiti

Quando tutti i limiti coinvolti esistono e le espressioni a destra dell'uguale hanno senso, si ha:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Teorema di sostituzione applicato alle successioni

Sia $[a, b]$ un intervallo in $\mathbb{R}$,

sia $x_n : \mathbb{N} \to [a, b]$ una successione: esiste $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in [a, b]$,

sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in x^*.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*).$$

Interpretazione:

Quando f è continua, f ed il limite commutano

Esempio $\lim_{n\to\infty} \sin(1/n^2) = \sin(\lim_{n\to\infty} 1/n^2) = \sin(0) = 0$

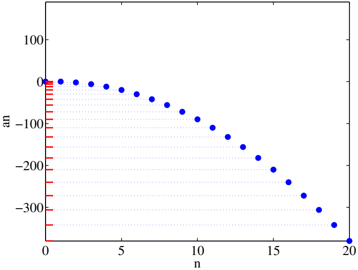
Successione superiormente limitata

Def. Una successione a_n si dice superiormente limitata se l'insieme immagine $\mathrm{im}(a_n) = \{a_n,\ n \geq n_0\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato, cioè se

$$\exists C \in \mathbb{R} : \quad a_n \leq C \qquad \forall n \geq n_0$$

(C è un maggiorante per l'insieme $\mathrm{im}(a_n)$)

Es.



$a_n = n - n^2$,
$\sup(A) = \max(A) = 0$.
C è un qualsiasi numero reale maggiore o uguale a 0.

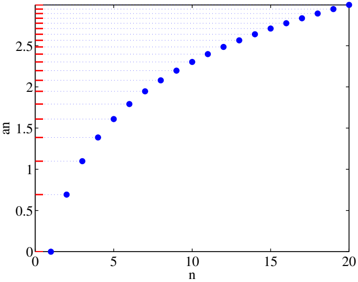
Successione inferiormente limitata

Def. Una successione a_n si dice inferiormente limitata se l'insieme immagine $\text{im}(a_n) = \{a_n,\ n \geq n_0\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ inferiormente limitato, cioè se

$$\exists C \in \mathbb{R} : \quad a_n \geq C \qquad \forall n \geq n_0$$

(C è un minorante per l'insieme $\text{im}(a_n)$)

Es.



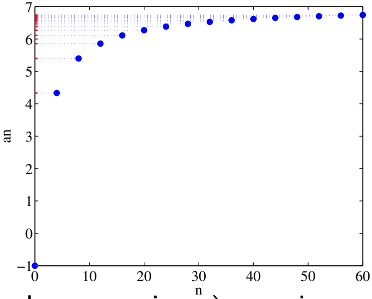
$a_n = \log(n)$
$\inf(A) = \min(A) = 0$
C è un qualsiasi numero reale minore o uguale a 0.

Successione limitata

Def. Una successione si dice **limitata** se è sia superiormente che inferiormente limitata, cioè se

$$\exists C > 0 : \quad |a_n| \leq C \qquad \forall n \geq n_0$$

Esempio. $a_n = \dfrac{7n-2}{n+2}$.



Vediamo che $-1 \leq \frac{7n-2}{n+2} < 7$

Quindi vale anche $-7 \leq \frac{7n-2}{n+2} < 7$

C è un qualsiasi numero reale maggiore o uguale a 7.

La successione è superiormente ed inferiormente limitata, quindi è limitata.

Disuguaglianza triangolare

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

ovvero: il valore assoluto di una somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti.

Esempi:

- $|5+3| \leq |5| + |3|$, cioè $8 \leq 8$,
- $|5+(-3)| \leq |5| + |-3|$, cioè $2 \leq 8$,
- $|-8+4| \leq |-8| + |4|$, cioè $4 \leq 12$
- $|-8+(-4)| \leq |-8| + |-4|$, cioè $12 \leq 12$

Limitatezza e convergenza

Teorema.

Sia a_n una successione convergente. Allora a_n è limitata.

Dim. Sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ e sia $\ell = \lim_{n \to \infty} a_n$. Per la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \ \forall n \geq n_0, \ n > n_\varepsilon \ \Rightarrow \ |a_n - \ell| < \varepsilon$$

se prendo $\varepsilon = 1$, esiste n_ε tale che $\forall n > n_\varepsilon$ si ha $|a_n - \ell| < 1$.
Per la disuguaglianza triangolare si ha:

$$|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|, \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Si pone $M = \max\{|a_{n_0}|, \ |a_{n_0+1}|, \ldots, |a_{n_\varepsilon}|, 1 + |\ell|\}$.
Per come ho definito M si ha $|a_n| \leq M$ per ogni valore di n, sia $n \leq n_\varepsilon$, sia $n > n_\varepsilon$. Quindi la successione è limitata. $\square$

Il viceversa del precedente teorema non è vero, ovvero una successione limitata non è detto che sia anche convergente.

Esempio. $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è convergente.
Esempio. $a_n = \sin(n)$, $b_n = \cos(n)$ sono limitate ma non convergenti.
Esempio. $a_n = \arctan(n)$ è limitata e convergente.

Corollario al secondo teorema del confronto

Sia a_n una successione limitata e b_n una successione infinitesima. Allora la successione prodotto $c_n = a_n b_n$ è infinitesima.

Es. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$ perché $a_n = sin(n)$ è limitata, $b_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima.

Successioni monotòne

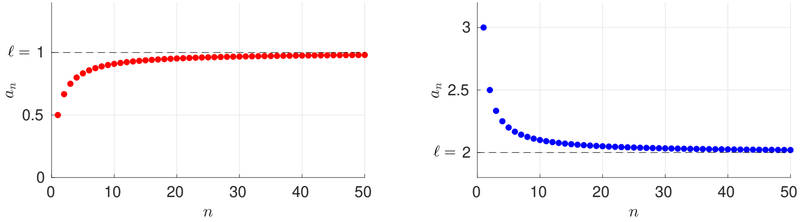
Def. Una successione si dice **monotona crescente** se

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \forall n \geq n_0,$$

si dice **monotona decrescente** se

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \geq n_0,$$

Esempi: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (crescente a sx) e $a_n = \frac{2n+1}{n}$ (decrescente a dx).

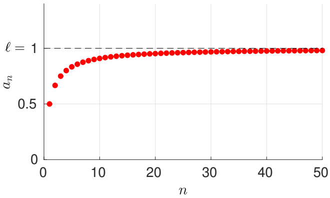


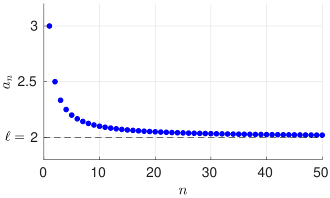
Limite di successioni monotone

Teorema Sia $\{a_n\}$ una successione monotona, allora essa è convergente o divergente (non può essere indeterminata).

In particolare:
se $\{a_n\}$ è monotona crescente, $\boxed{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq n_0} a_n}$

mentre:
se $\{a_n\}$ è monotona decrescente, $\boxed{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq n_0} a_n}$





Esempio

Sia $a_n = \frac{n+7}{n+2}$, calcolare sup, inf, max e min (se esistono) dell'insieme immagine di a_n.

Svolgimento. Dimostriamo che a_n è monotona decrescente, quindi per il teorema delle successioni monotone, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 0} a_n = 1.$$

Il massimo dell'insieme immagine $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ è assunto quando $n = 0$ e vale $a_0 = 7/2$, quindi: $\max A = \sup A = 7/2$, $\inf A = 1$, non esiste $\min A$ perchè non c'è alcun numero naturale tale che $a_n = \frac{n+7}{n+2} = 1$.

La successione geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$. La successione geometrica è $a_n = q^n$.

Teorema

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1 \ (-1 < q < 1) \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Esempio

n	2^n	$(0.5)^n$	$(-2)^n$	$(-0.5)^n$
0	1	1	$+1$	$+1$
1	2	0.5	-2	-0.5
2	4	0.25	$+4$	$+0.25$
3	8	0.125	-8	-0.125
4	16	0.0625	$+16$	$+0.0625$
...				
10	1024	0.00097656	$+1024$	$+0.00097656$
11	2048	0.00048828	-2048	-0.00048828

Ordini di infinito

Siano a_n e b_n due successioni divergenti.

1. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ diciamo che a_n ha ordine di infinito maggiore di quello di b_n.

   Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n-1} = \infty$,

2. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R},\ \ell \neq 0$ diciamo che a_n e b_n hanno lo stesso ordine di infinito e scriviamo $a_n \sim \ell b_n$ per $n \to \infty$

   Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{2n^3-1} = \frac{1}{2}$.

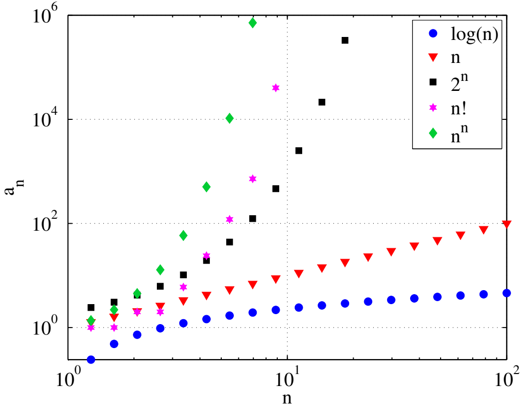
3. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ diciamo che a_n ha ordine di infinito minore di quello di b_n.

   Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0$.

Confronto riassuntivo sugli ordini di infinito

Le seguenti successioni sono ordinate, in ordine crescente, da sinistra a destra riguardo al loro ordine di infinito.

$(\log n)^\beta$	n^α	q^n	$n!$	n^n
$(\beta > 0)$	$(\alpha > 0)$	$q > 1$		



Ordini di infinitesimo

Siano a_n e b_n due successioni infinitesime.

1. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ diciamo che a_n ha ordine di infinitesimo maggiore di quello di b_n.

   Esempio: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{-n}}{1/n} = 0$,

2. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R},\ \ell \neq 0$ diciamo che a_n e b_n hanno lo stesso ordine di infinitesimo e scriviamo $a_n \sim \ell b_n$ per $n \to \infty$

   Esempio: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$.

3. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ diciamo che a_n ha ordine di infinitesimo minore di quello di b_n.

   Esempio: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(1/n)}{1/n^2} = \infty$

Dal teorema di sostituzione

Vale la seguente identità:

$$\boxed{(a_n)^{b_n} = e^{\log(a_n)^{b_n}} = e^{b_n \cdot \log a_n}}$$

Notazione: $\exp(n) = e^n$

$$n^{1/n^2} = \exp\left(\log n^{1/n^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{n^2}\log n\right) = \exp\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\log n}{n^2}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^2}\right) = e^0 = 1$$

Criterio del rapporto

Sia a_n una successione e sia $\overline{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > 0$ per ogni $n \geq \overline{n}$.
Sia $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
Se $q < 1$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

se $q > 1$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

se $q = 1$ allora non posso concludere nulla.

Esercizi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$$

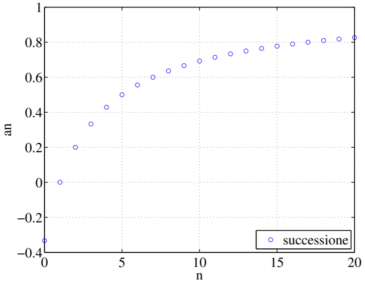
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2} - 1}{2n^{-2} \cdot \log(n+7)} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

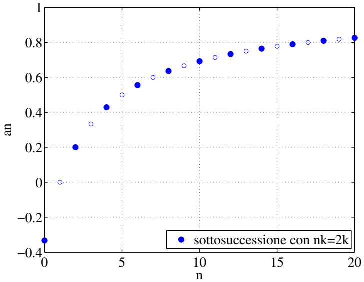
Sottosuccessioni

Def. Data una successione $\{a_n\}$, chiamiamo sottosuccessione di $\{a_n\}$ ogni successione estratta da questa, ossia ogni successione del tipo $\{a_{n_k}\}$ con $k \geq k_0$, dove $\{n_k\}$ è una successione monotona strettamente crescente di valori in $\mathbb{N}$ ($n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che $n_k : k \mapsto n_k$).

Esempio 1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+3}$, con $n \geq 0$. $n_k = 2k$, con $k \geq 0$ (n_k è la successione dei soli numeri pari).
Ottengo la sottosuccessione:
$a_{n_k} = \dfrac{n_k - 1}{n_k + 3}$ con $n_k = 2k$ e $k \geq 0$.

Esempio 1. $a_n = \dfrac{n-1}{n+3}$ e $a_{n_k} = \dfrac{n_k - 1}{n_k + 3}$ con $n_k = 2k$





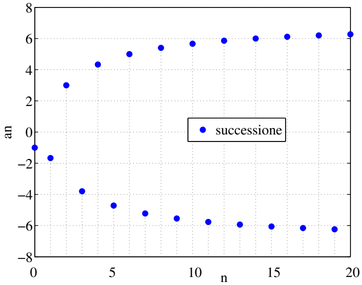
$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.\}$

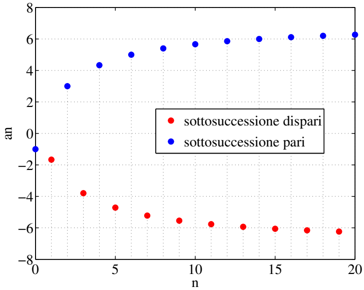
$\{a_{n_k}\} = \{a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots.\}$

Sottosuccessioni

Esempio 2. $a_n = (-1)^n \dfrac{7n-2}{n+2}$, con $n \geq 0$.

$$a_{n_k} = -\frac{7n_k - 2}{n_k + 2}, \quad \text{per } n_k = 2k+1$$
$$a_{n_k} = \frac{7n_k - 2}{n_k + 2}, \quad \text{per } n_k = 2k$$





Ho estratto da a_n due sottosuccessioni.

Da una successione a_n posso estrarre infinite sottosuccessioni.

Teorema. Se una successione $\{a_n\}$ è convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, allora ogni sottosuccessione estratta da a_n converge ad ℓ, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell, \qquad \text{per ogni } n_k.$$

Es. Si veda l'Esempio 1.

Teorema. Se da una successione a_n estraggo due sottosuccessioni che convergono a due limiti diversi, allora a_n è indeterminata, ovvero

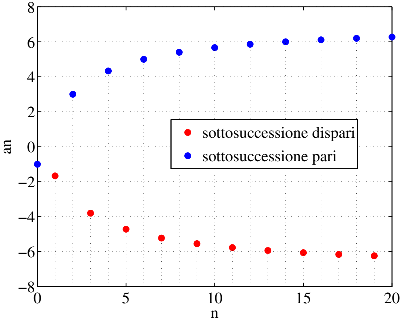
$$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Es. Si veda l'Esempio 2. Per $n_k = 2k$, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +7$. Per $n_k = 2k+1$, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -7$, quindi $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.

Teorema (di Bolzano - Weierstrass)

Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Es. Si veda l'Esempio 2. a_n è limitata, si ha $\inf a_n = -7$ e $\sup a_n = 7$.
Abbiamo già trovato due sottosuccessioni di a_n che sono convergenti.



Riferimenti Bibliografici

Canuto-Tabacco. Sez. 3.2, Sez. 5.4 dell'edizione Springer,
Canuto-Tabacco. Sez. 4.2, Sez. 5.6 dell'edizione Pearson.

Esercizi: Studiare il comportamento delle seguenti successioni (monotona crescente, decrescente, oscillante), calcolarne inf, sup, max e min e $\lim_{n\to\infty} a_n$:

$$a_n = \frac{3n-4}{2n+1}, \qquad a_n = \frac{n^2+1}{n^2-3n+2}, \qquad a_n = \frac{n^3}{\sqrt{n}},$$

$$a_n = \arctan(n) \qquad a_n = \log(n), \qquad a_n = \sin n$$

$$a_n = \frac{n+7}{8n+2} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+n}{n+\sin(n!)} \cdot \frac{n^n \cdot n!}{(n+2)^n \cdot (n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}+7n!}{(n+2)^n \cdot (7n+\sin(n))} =$$