STUDIO di FUNZIONE

Punti di estremo: punto di massimo assoluto

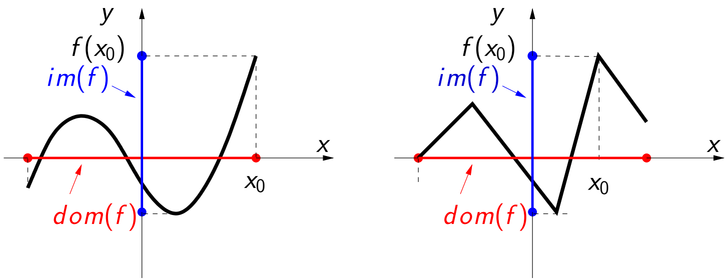
Per brevità in alcuni casi utilizzo la notazione $D = dom(f)$.

Def. Sia $x_0 \in dom(f)$. Si dice che x_0 è un punto di massimo assoluto per f se

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in D = \mathrm{dom}(f)$$

ovvero

$$f(x_0) = \max_{x \in D} f(x).$$



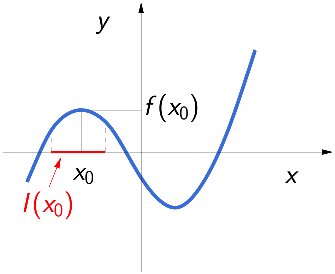
Punto di massimo relativo

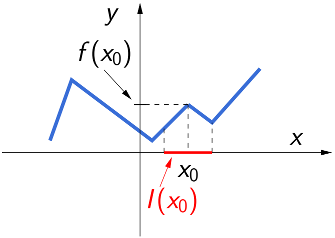
Def. Sia $x_0 \in \text{dom}(f) = D$. Si dice che x_0 è un punto di massimo relativo per f se esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I(x_0) \cap D.$$

ovvero

$$f(x_0) = \max_{x \in I(x_0) \cap D} f(x).$$





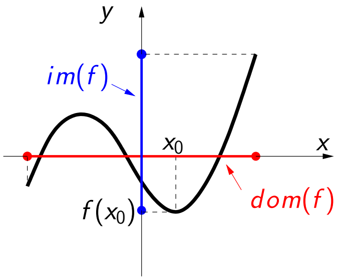
Punto di minimo assoluto

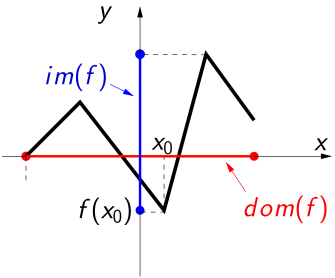
Sia $x_0 \in \text{dom}(f) = D$. Si dice che x_0 è un punto di minimo assoluto per f se

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in D = \text{dom}(f)$$

ovvero

$$f(x_0) = \min_{x \in D} f(x).$$





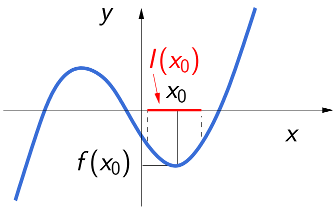
Punto di minimo relativo

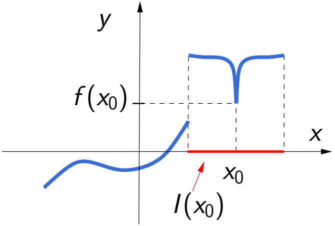
Def. Sia $x_0 \in \text{dom}(f) = D$. Si dice che x_0 è un punto di minimo relativo per f se esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I(x_0) \cap D.$$

ovvero

$$f(x_0) = \min_{x \in I(x_0) \cap D} f(x).$$

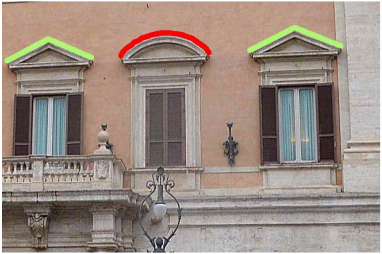


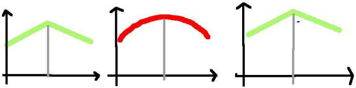


Osservazioni

1. Per definire i punti di estremo NON abbiamo utilizzato il concetto di derivata, ma solo il confronto dei valori $y = f(x)$.
2. I punti di massimo relativo e minimo relativo sono detti punti di estremo relativo, mentre i punti di massimo e minimo assoluto sono detti punti di estremo assoluto.
3. Un punto di estremo assoluto è anche punto di estremo relativo, il viceversa non è sempre vero.
4. In un punto di massimo o minimo relativo la funzione può essere NON derivabile.
5. Punti di cuspide sono sempre punti di massimo o di minimo relativo. Punti angolosi, non necessariamente sono punti di estremo.

Esempi





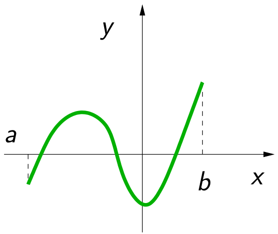
Tutti punti di massimo relativo e assoluto.

2 punti angolosi e

1 punto in cui f è derivabile

Derivata di f agli estremi di un intervallo

Se f è definita solo in un intorno sinistro di x_0 ed esiste $f'_-(x_0)$ si assume che f sia derivabile in x_0 e si definisce $f'(x_0) = f'_-(x_0)$. (es. $f'(b) = f'_-(b)$.)



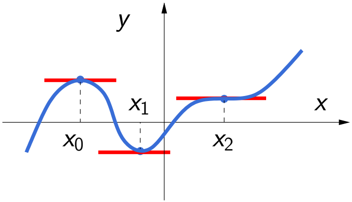
Se f è definita solo in un intorno destro di x_0 ed esiste $f'_+(x_0)$ si assume che f sia derivabile in x_0 e si definisce $f'(x_0) = f'_+(x_0)$. (es. $f'(a) = f'_+(a)$)

Punti stazionari (o critici)

Def. Un punto $x_0 \in \text{dom}(f)$ si dice punto stazionario (o punto critico) per f, se:

- f è derivabile in x_0 e
- $f'(x_0) = 0$,

ovvero la tangente ad f in x_0 è una retta orizzontale.

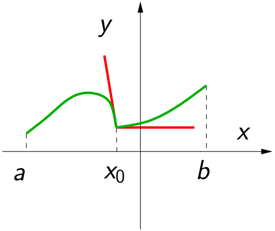


Osservazione 1. Per definire un punto stazionario serve la definizione di derivata prima.

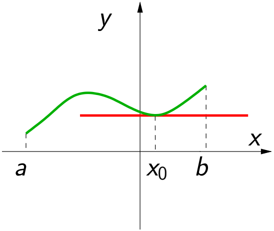
Osservazione 2. Un punto stazionario non è necessariamente un punto di massimo o di minimo relativo.

Punti di estremo e punti stazionari

Osservazione 3. Non è detto che i punti di massimo e minimo relativo siano punti stazionari.



x_0 è p. di minimo relativo
f NON è derivabile in x_0
x_0 NON è punto stazionario

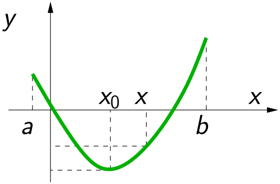


x_0 è p. di minimo relativo
f è derivabile in x_0
x_0 è punto stazionario

Teorema dei punti stazionari di Fermat

Sia f definita in un intorno $I_r(x_0)$ del punto x_0 e derivabile in x_0.
Sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo per f.
Allora x_0 è un punto stazionario per f.

Dimostrazione. Sia x_0 punto di minimo relativo per f, x_0 interno a $\mathrm{dom}(f)$ e $\exists f'(x_0)$ finita. Devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$.



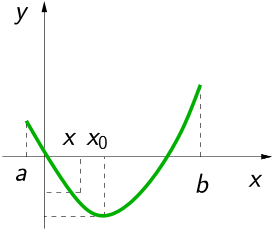
Se x_0 è punto di minimo relativo, si ha $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in I(x_0)$, ovvero $f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Sia $x > x_0$ (ovvero $x - x_0 > 0$), allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

e facendo tendere $x \to x_0^+$, per il corollario al teorema della permanenza del segno, si ha

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Ora prendo $x < x_0$ (ovvero $x - x_0 < 0$),
allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$



e facendo tendere $x \to x_0^-$, sempre per il corollario al teorema della permanenza del segno,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Poichè f è derivabile in x_0 si deve avere

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

ovvero

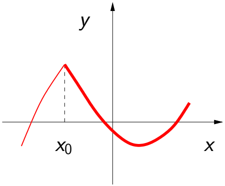
$$0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0.$$

Se x_0 è punto di massimo relativo la dimostrazione è analoga. $\square$

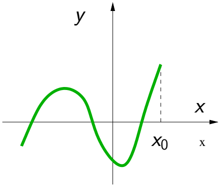
Ricerca dei punti di estremo

I punti di estremo di una funzione vanno ricercati tra i punti $x \in \text{dom}(f)$ che sono:

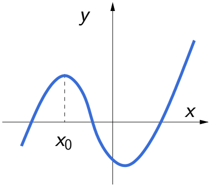
- punti di non derivabilità (punti angolosi e cuspidi)
- estremi finiti (in $\mathbb{R}$) del dominio.
- punti stazionari, $f'(x_0) = 0$ (per il teorema di Fermat)



x_0 =punto di non derivabilità



x_0 =estremo (in $\mathbb{R}$) del dominio



x_0 =punto stazionario

Crescenza/decrescenza di $f(x)$

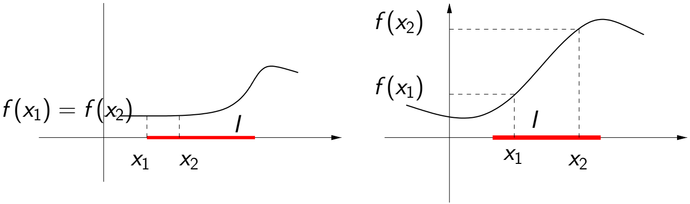
Sia I il dominio di una funzione f reale a valori reali, oppure un intervallo contenuto nel dominio di f.

Ricordiamo la def. di funzione crescente:

Def. La funzione f si dice **monotona crescente su I** se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Def. La funzione f si dice **monotona strettamente crescente su I** se $\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$



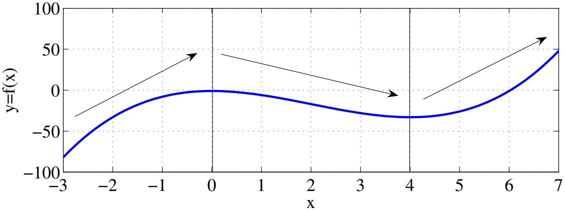
Risulta impossibile verificare la crescenza e decrescenza di $f(x)$ mediante la definizione: dovremmo verificare la propr. per infinite coppie di punti!

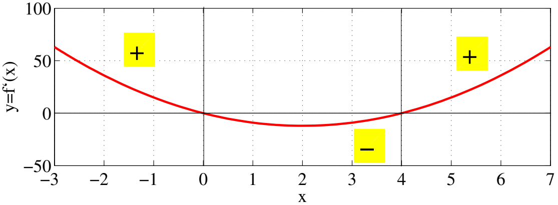
Criterio del segno della derivata prima

Teorema.

Sia $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$ un intervallo e sia f derivabile su I. Allora

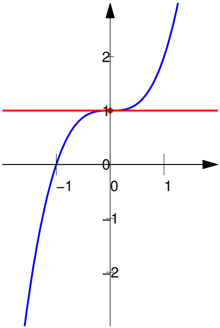
$$f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è crescente su } I \text{ e}$$
$$f'(x) > 0,\ \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente su } I.$$





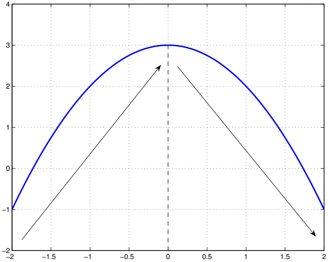
f strett. crescente $\not\Rightarrow f'(x) > 0$

Esempio. $f(x) = x^3 + 1$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$, ovvero f strett. crescente. non implica $f'(x) > 0$

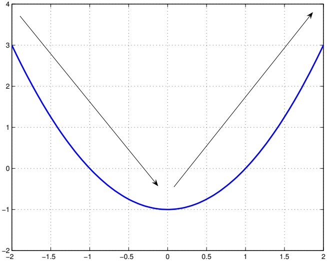


Crescenza/decrescenza e punti di estremo

Corollario Sia $x_0 \in \; dom(f)$ e sia f derivabile nell'intorno (completo) $I(x_0)$, eccetto eventualmente nel punto x_0.
Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x < x_0$ e $f'(x) \leq 0 \quad \forall x > x_0$ allora x_0 è punto di max relativo per f (figura a sinistra).
Se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x < x_0$ e $f'(x) \geq 0 \quad \forall x > x_0$ allora x_0 è punto di min relativo per f (figura a destra).



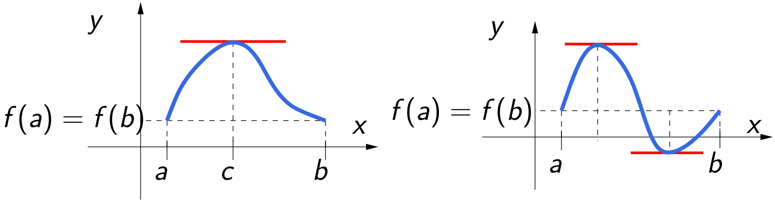
x_0 è p.to di max. rel.



x_0 è p.to di min. rel.

Per arrivare a dimostrare il criterio del segno della derivata prima serve prima dimostrare altri due teoremi: il teorema di Rolle e il teorema di Lagrange.

Teorema di Rolle. Sia f una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile su (a, b); sia $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.



Dim.

f è continua su un intervallo chiuso e limitato, allora per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo M e minimo m (assoluti), con $x_m, x_M \in [a, b]$ (x_m e x_M punti di minimo e di massimo).

Caso a. $m = M$.

Allora f è costante su $[a, b]$ e $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$.

Caso b. $m \leq f(a) = f(b) < M$.

f assume massimo in un punto interno ad $[a, b]$.

Il punto di massimo assoluto x_M è anche punto di massimo relativo, f è definita in un tutto un intorno di x_M ed f è derivabile in un intorno di x_M.

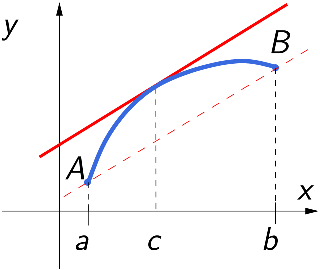
Ho le ipotesi per applicare il teorema di Fermat e concludere che x_M è un punto stazionario, ovvero $f'(x_M) = 0$.

Caso c. $m < f(a) = f(b) \leq M$.

f assume minimo in un punto interno ad $[a, b]$. La dimostrazione è analoga al Caso b. $\square$

Teorema di Lagrange. Sia f una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Oss. La tesi dice che: esiste un punto c per cui la tangente ad f in c è parallela alla retta passante per i punti $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Dim. Si consideri la funzione $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.
$h(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ (perchè somma di funzioni continue in $[a, b]$), derivabile in (a, b) (perchè somma di funzioni derivabili in (a, b)), e

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = f(a)$$
$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(b) + f(a)$$

La funzione $h(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$.

Ma $\qquad h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad$ e dire

$h'(c) = 0$ equivale a dire $\qquad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$

A questo punto abbiamo tutti i teoremi che servono per dimostrare il Criterio del segno della derivata prima.

Dimostrazione del Criterio del segno della derivata prima

Dimostro 1 $\Rightarrow$. Ip: f derivabile e $f'(x) \geq 0$ in I. Ts: f crescente in I.
Siano $x_1, x_2 \in I$ arbitrari, con l'unica richiesta che $x_1 < x_2$.
Sappiamo che se f è derivabile in I, allora f è anche continua in I.
f continua in I implica che f è continua anche in $[x_1, x_2] \subset I$.
f derivabile in I implica che f è derivabile anche in $(x_1, x_2) \subset I$.
Quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[x_1, x_2]$.
Segue che f soddisfa anche la tesi del teorema di Lagrange, cioè $\exists c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Poiché $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ allora si ha anche $f'(c) \geq 0$, quindi

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

Poiché ho preso $x_1 < x_2$, l'ultima disuguaglianza implica che $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Poiché x_1 e x_2 sono arbitrari in I, questo significa che f è crescente in I.

Dimostro 2 $\Rightarrow$. Ip: f derivabile e $f'(x) > 0$ in I. Ts: f strettamente crescente in I.
Se nella dimostrazione precedente sostituiamo $\geq$ con $>$ e $\leq$ con $<$ e ragioniamo alla stessa maniera, otteniamo che f è strettamente crescente in I.

Dimostro 1 $\Leftarrow$. Ip: f derivabile e crescente in I, Ts: $f'(x) \geq 0$ in I.
Dire che f è crescente in I, per difinizione, equivale a dire che

$$\forall x,\ x_0 \in I,\ x < x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0),$$

cioè che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Calcolo

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Per il corollario al teorema della permanenza del segno il limite appena scritto è ≥ 0, quindi ottengo $f'_-(x_0) \geq 0$.
Poiché f è derivabile in I, vale $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, quindi trovo $f'(x_0) \geq 0$. Poiché x_0 è arbitrario in I, ottengo che $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.

c.v.d

Teorema della derivata nulla

Sia f continua e derivabile su un intervallo I. Sia $f'(x) = 0\ \forall x \in I$, allora f è costante in I.

Dimostrazione. Dimostrare che f è costante su I equivale a dimostrare che $f(x_1) = f(x_2),\ \forall x_1,\ x_2 \in I$.
Dimostriamo per assurdo: $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$.
Negare la tesi equivale a dire che $\exists x_1,\ x_2 \in I :\ f(x_1) \neq f(x_2)$.
Applichiamo il teorema di Lagrange (f soddisfa le ipotesi del thm di Lagrange sull'intervallo $[x_1, x_2] \subset I$), otteniamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

che contraddice l'ipotesi.

Teorema di de l'Hôpital

Siano f e g due funzioni definite in un intorno di x_0, tranne al piú nel punto x_0. Se:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L \qquad \text{con } L = 0 \qquad \text{o } L = \pm\infty,$

2. f e g sono derivabili nell'intorno di x_0, tranne eventualmente in x_0, con $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$,

3. esiste (finito o infinito) il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esempi: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin(5x)}$ (OK) $\qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin(x)}{3x - \cos(x)}$ (NO)

Vediamo se possiamo applicare de l'Hôpital a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{3x-\cos(x)}$.

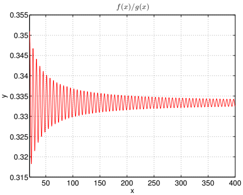
1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+sin(x)) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(3x-cos(x)) = +\infty$

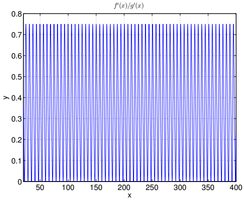
2) $f(x) = x + sin(x)$ e $g(x) = 3x - cos(x)$ sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$

3) $\displaystyle\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+cos(x)}{3+sin(x)}$? NO

Allora de l'Hôpital non può essere applicato perchè manca un'ipotesi.
Non abbiamo soluzione del limite dato usando questo teorema.
Questo non vuol dire che non esiste il limite dato.

Infatti: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{3x-\cos(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+sin(x)/x)}{x(3-cos(x)/x)} = \frac{1}{3}$





$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}, \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \nexists$$

Abbiamo visto le definizioni:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il seguente teorema fornisce un criterio per valutare derivata destra e sinistra in maniera alternativa sfruttando l'espressione di $f'(x)$.

TEOREMA DEL LIMITE DELLA DERIVATA

Sia f una funzione definita e continua in $I(x_0)$ e derivabile in $I(x_0)$ tranne eventualmente in x_0.

Se esiste (finito o infinito) $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$, allora esiste anche la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ in x_0 e si ha $f'_-(x_0) = \ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$.

Se esiste (finito o infinito) $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$, allora esiste anche la derivata destra $f'_+(x_0)$ in x_0 e si ha $f'_+(x_0) = \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$.

Dimostrazione.

Applichiamo il teorema di de l'Hôpital:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

Quindi, se esiste $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$, possiamo togliere l'incertezza al passaggio (H) e concludere che

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Quindi, se esiste $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$, possiamo togliere l'incertezza al passaggio (H) e concludere che

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Teorema del limite della derivata: esempio 1

$f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.
Applico la definizione di derivata in un punto:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Calcolo $f'(x) = \cos x$.

$$\exists \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Ottengo che

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 1$$

Teorema del limite della derivata: esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{con } x_0 = 0.$$

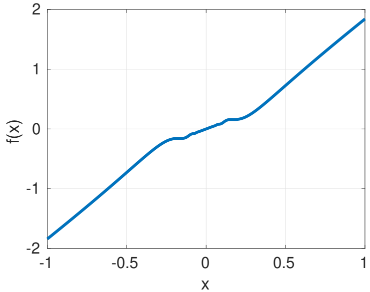
Applico la definizione di derivata in un punto:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x}{x} = 1$$

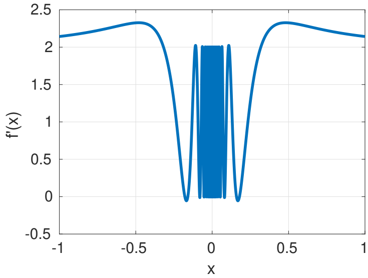
Calcolo $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$\nexists \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left[2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right]$$

quindi non posso dire che $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$



$f(x)$



$f'(x)$

Derivata seconda

Def. Se f' è derivabile in x_0, si dice che f è derivabile due volte in x_0 e si pone

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

$f''(x_0)$ è detta derivata seconda di f in x_0.

La funzione che associa ad x il valore $f''(x)$, ove questo sia definito, è detta funzione derivata seconda.

Es. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 1, \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x,$
$f''(x) = 6x - 12$

Convessità e concavità

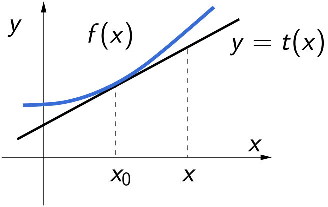
Consideriamo la funzione $f(x)$, definita in un intorno del punto x_0 e l'equazione della retta t tangente ad f nel punto $x_0 \in \mathrm{dom}(f')$:

$$t: \ y = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Def. La funzione f si dice convessa (o volge la concavità verso l'alto) in x_0 se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 tale che:

$$\forall x \in I_r(x_0) \qquad f(x) \geq t(x)$$

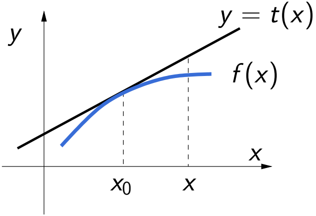
e si dice strettamente convessa in x_0 se $f(x) > t(x)$, $\forall x \in I_r(x_0) \setminus x_0$.



Def. La funzione f si dice concava in x_0 se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 tale che:

$$\forall x \in I_r(x_0) \qquad f(x) \leq t(x)$$

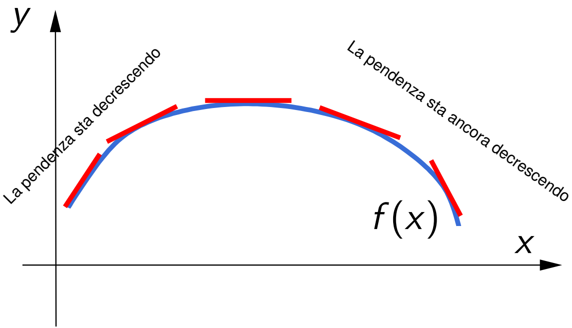
e si dice strettamente concava in x_0 se $f(x) < t(x)$, $\forall x \in I_r(x_0) \setminus x_0$.



Def. Sia I un intervallo e f derivabile su I. f si dice convessa (risp. concava) su I, se è convessa (risp. concava) in ogni punto di I.

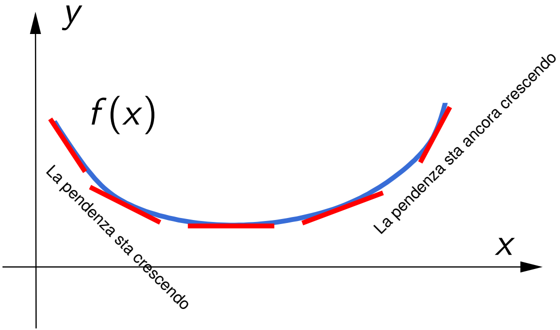
Le variazioni della derivata prima

Questa è una funzione **concava** su tutto l'intervallo di definizione, la sua **derivata prima decresce**, cioè $(f')'(x) = f''(x) \leq 0$



Le variazioni della derivata prima

Questa è una funzione **convessa** su tutto l'intervallo di definizione, la sua **derivata prima cresce**, cioè $(f')'(x) = f''(x) \geq 0$



Criterio del segno della derivata seconda

Teorema. Se f è una funzione derivabile due volte su I, si ha:

$$f''(x) \geq 0, \qquad \forall x \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ è convessa su } I$$

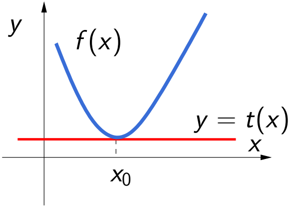
e

$$f''(x) > 0, \quad \forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente convessa su } I.$$

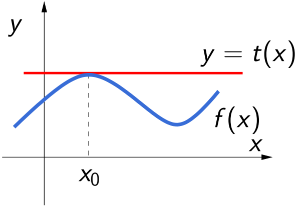
Osservazione. Se f è strettamente convessa su I, non è detto che $f''(x) > 0$ su I.
Es.: $f(x) = x^4$. In $x = 0$ si ha $f''(0) = 0$ ed f strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Convessità nei punti di estremo stazionari

Se x_0 è un **punto di minimo** (relativo o assoluto) per f ed è stazionario ($f'(x_0) = 0$), allora $f''(x_0) \geq 0$, cioè f è **convessa** in x_0.
La retta tangente in x_0 sta sotto la curva

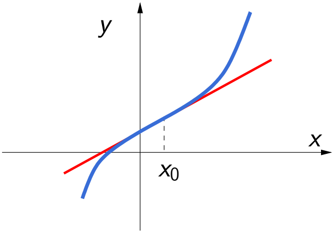


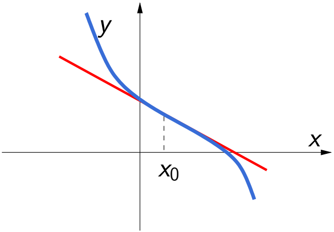
Se x_0 è un **punto di massimo** (relativo o assoluto) per f ed è stazionario ($f'(x_0) = 0$), allora $f''(x_0) \leq 0$, cioè f è **concava** in x_0.
La retta tangente in x_0 sta sopra la curva



Punti di flesso

Def. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di derivabilità per f, oppure $f'(x_0) = \pm\infty$.
Il punto x_0 si dice **punto di flesso** per f se esiste un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava ed esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa, oppure se esiste un intorno sinistro di x_0 in cui f è convessa ed esiste un intorno destro di x_0 in cui f è concava.





punto di flesso a tangente orizzontale: x_0 punto di flesso e $f'(x_0) = 0$,
punto di flesso a tangente obliqua: x_0 punto di flesso e $f'(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
punto di flesso a tangente verticale: x_0 punto di flesso e $f'(x_0) = +\infty$ o $f'(x_0) = -\infty$

Obiettivo: disegnare il grafico di una funzione $y = f(x)$.

Passi da seguire.

1. Determinare il dom(f)
2. Determinare eventuali simmetrie e periodicità.
3. Determinare possibili asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) [questo vuol dire calcolare i limiti di f agli estremi del dominio].
4. Individuare eventuali punti di discontinuità.
5. Calcolare la derivata prima e determinare il suo dominio, individuando e classificando eventuali punti di non derivabilità.
6. Studiare il segno della derivata prima per individuare dove la funzione è crescente/decrescente. Determinare, se esistono, i punti di estremo della funzione.
7. Calcolare la derivata seconda di f.
8. Studiare il segno della derivata seconda per individuare dove la funzione è convessa/concava. Determinare, se esistono, i punti di flesso della funzione.
9. DISEGNARE IL GRAFICO DI $y = f(x)$

Riferimenti bibliografici:
Canuto Tabacco (ed. Springer), Sez. 6.4, 6.5, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10.
Canuto Tabacco (ed. Pearson), Sez. 8.4, 8.5, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10.

Esercizi: Svolgere i vari passi dello studio di funzione per le funzioni elementari viste.
Fare lo studio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$
3. $f(x) = x\log(x)$
4. $f(x) = e^{1/x^2}$
5. $f(x) = e^{1/x}$