Derivate di ordine superiore al secondo

In maniera analoga a quanto fatto per la derivata seconda, si può definire la derivata terza di f in x_0, se esiste, come la derivata prima in x_0 della derivata seconda di f:

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

ed in generale, per $k \geq 1$, la la derivata di ordine k di f in x_0 è

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Per definizione si pone $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, ovvero la derivata di ordine zero di una funzione è la funzione stessa.

Es. $f(x) = x^4 + \sin(x)$ $\qquad f'(x) = 4x^3 + \cos(x)$

$f''(x) = 12x^2 - \sin(x)$, $\qquad f'''(x) = f^{(3)}(x) = 24x - \cos(x)$.

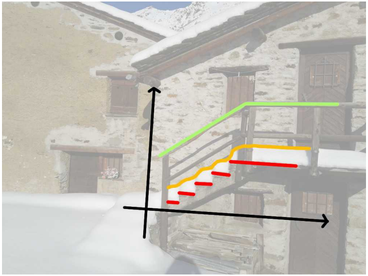
Def. Una funzione f si dice di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 0$) su un intervallo I, se essa è derivabile k volte in I e se la funzione derivata $k-$sima di f ($f^{(k)}(x)$) è un funzione continua su I.
L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ su I è denotato con $\mathcal{C}^k(I)$.

$\mathcal{C}^\infty(I)$ è l'insieme delle funzioni che sono derivabili un numero arbitrario (∞) di volte su I.

Es. $f(x) = e^x$, $\qquad f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1, 2, \ldots$..
Qualunque sia k, la derivata $f^{(k)}(x)$ coincide con f che è una funzione continua su $\mathbb{R}$, quindi $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Es. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0, +\infty)$: $\qquad f \in \mathcal{C}^0(I)$: in $x = 0$ f è definita, continua, ma non derivabile, quindi $f \notin \mathcal{C}^1(I)$.

Esempi



$f(x)$ discontinua, 'a scala'

$f(x)$ continua, con un punto angoloso

$f(x)$ continua e derivabile

Differenza tra f derivabile in I e $f \in \mathcal{C}^1(I)$

Sia $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

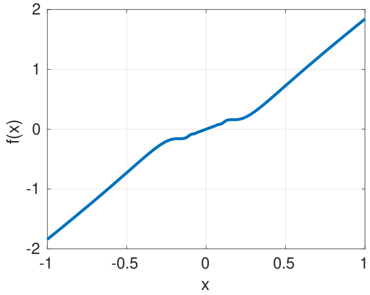
- dire f derivabile in I vuol dire $\exists f'(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I$
- dire $f \in \mathcal{C}^1(I)$ vuol dire f derivabile in I e $f'(x)$ è continua in I

Esempio. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

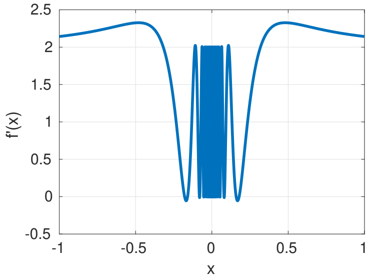
f è derivabile in tutto il suo dominio e risulta

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tuttavia f' presenta in $x_0 = 0$ un punto di discontinuità di seconda specie perché $\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$.



$f(x)$



$f'(x)$