I POLINOMI DI TAYLOR



Brook Taylor (1685 – 1731) matematico inglese

A cosa servono?

- Per calcolare e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$ con una calcolatrice o con un computer,
- per risolvere limiti complessi che portano a forme $\frac{0}{0}$ del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\log(1+2x)\right) - e^{2x} + 1}{\tan x^2} = \frac{0}{0},$$

in cui il Teorema di de l'Hôpital e i limiti fondamentali non sono di molto aiuto,

L'idea di Taylor: APPROSSIMARE le funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche, irrazionali, etc, con dei polinomi, partendo dai valori noti di f e delle sue derivate in un punto x_0 particolare.

Polinomio di Taylor

Sia f definita in un intorno di x_0, continua e derivabile $n \geq 0$ volte in x_0.
Voglio costruire un polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$ che condivide con f i valori di tutte le derivate nel punto x_0 fino all'ordine n, cioè:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f(x_0) \\ p_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ p_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ p_n^{(3)}(x_0) &= f^{(3)}(x_0) \\ \dots &= \dots \\ p_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Questo polinomio esiste unico, è detto polinomio di Taylor $p_n(x)$ di f centrato in x_0 ed ha grado n ed è così definito:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Si ricorda che $f^{(0)}(x) = f(x)$, cioè la derivata di ordine 0 è la funzione stessa.

Applichiamo la sviluppo - prendiamo $n=4$

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= \underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0}_{k=0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1}_{k=1} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}_{k=3} + \underbrace{\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4}_{k=4}$$

prendo $x_0 = 0$ $\quad f(x) = e^x$

$f(x) = e^x$	$f(0) = e^0 = 1$	$0! = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = e^0 = 1$	$1! = 1$
$f''(x) = e^x$	$f''(0) = 1$	$2! = 2$
$f'''(x) = e^x$	$f'''(0) = 1$	$3! = 6$
$f^{IV}(x) = e^x$	$f^{IV}(0) = 1$	$4! = 24$

Allora

$$P_4(x) = \underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0}_{k=0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{k=1} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}_{k=3} + \underbrace{\frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4}_{k=4} =$$

$$= \frac{1}{1}\cdot 1 + \frac{1}{1}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$\Rightarrow \boxed{P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4}$$ = pol di Taylor di grado 4 che approx $f(x) = e^x$ in un intorno del punto $x_0 = 0$

? $P_1(x)$ che approx $f(x)=e^x$ in un intorno $x_0=0$

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1$$

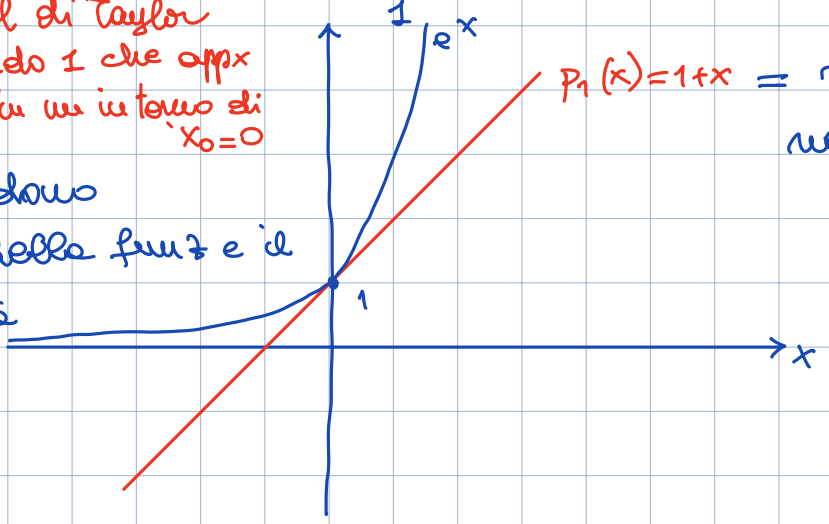
($f^{(0)}(x_0)$: 1; $f^{(1)}(x_0)$: 1)

$$= 1\,(x-0)^0 + 1\,(x-0) = 1+x$$

$(x-0)^0 = 1$

$\boxed{P_1(x) = 1+x}$ è il pol di Taylor di grado 1 che approx $f(x)=e^x$ in un intorno di $x_0=0$

$P_1(x)$ e $f(x)$ condividono in $x_0=0$ il valore della funz e il valore della derivata prima



$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$P_1(x)$

$P_2(x)$

$P_3(x)$

Calcoliamo un polinomio di Taylor

$f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$, $n \geq 0$

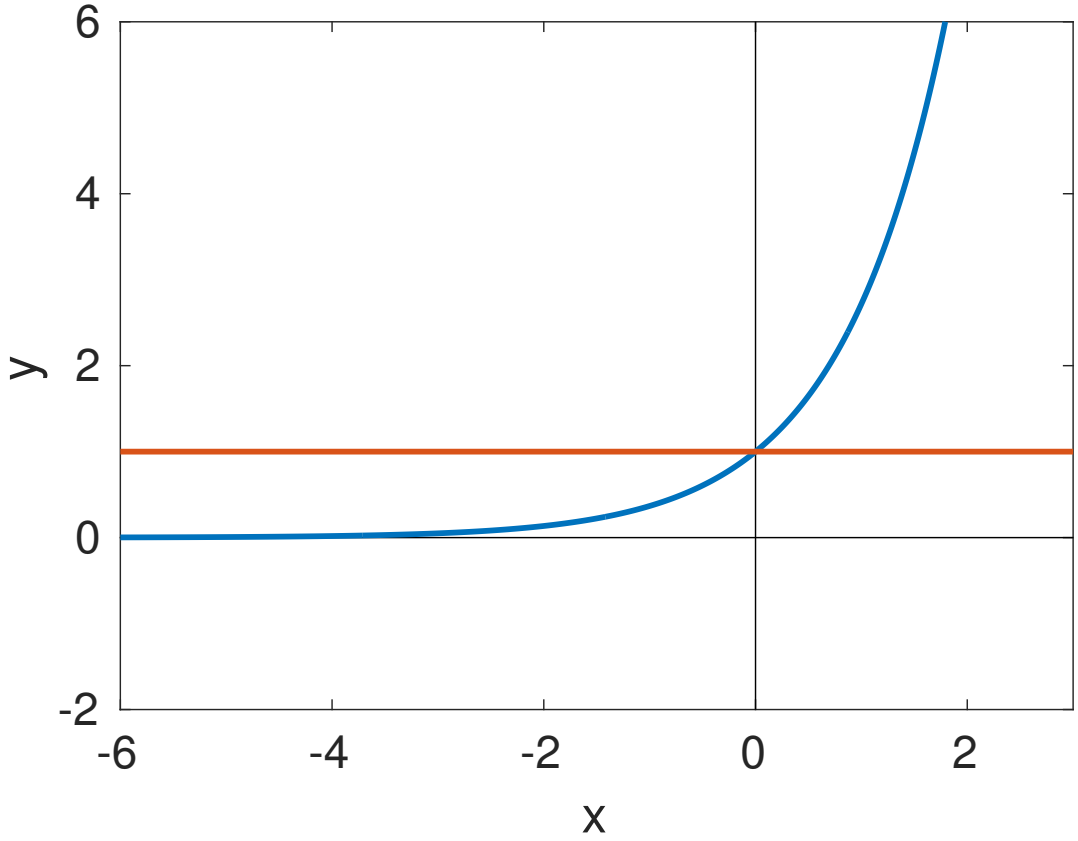
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
n = 0 \qquad & p_0(x) = f(x_0) = f(0) = 1 \\
n = 1 \qquad & p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x \\
n = 2 \qquad & p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\
n = 3 \qquad & p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\
n > 3 \qquad & p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

$p_0(x) = 1$ (costante che interseca $f(x)$ in $x_0 = 0$)

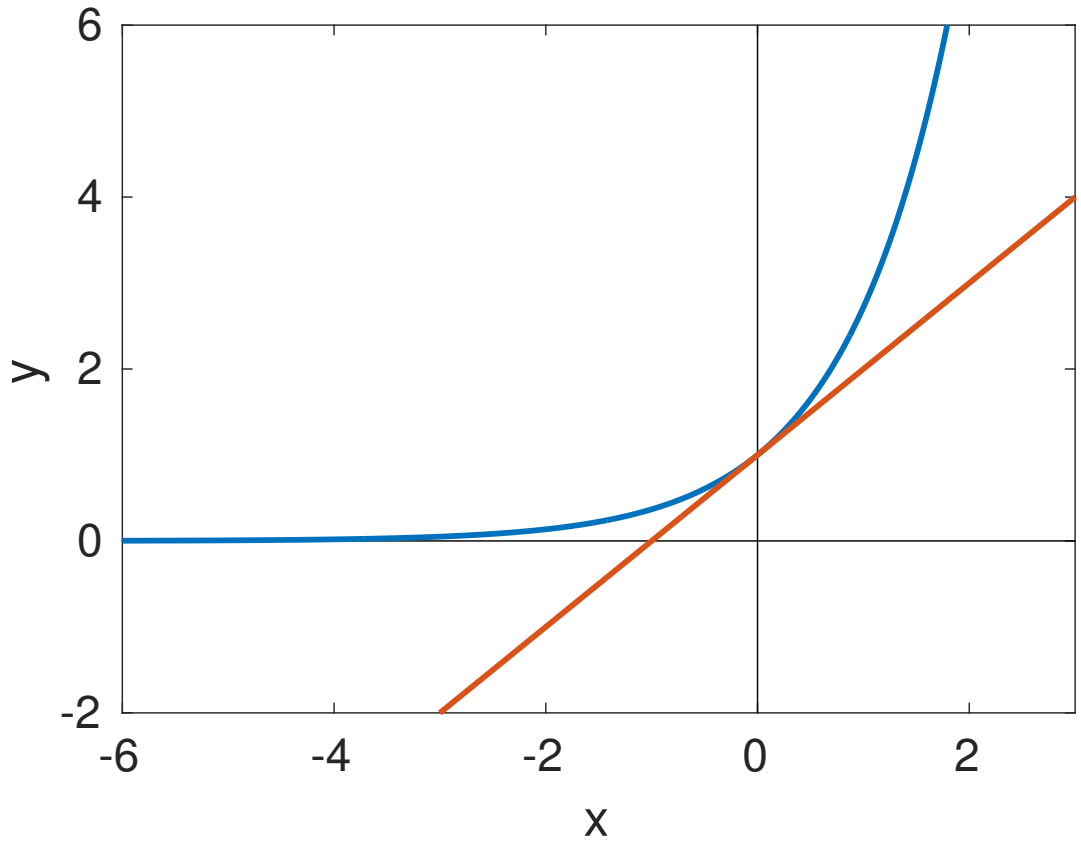


Si ha: $f(0) = p_0(0)$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

$$p_1(x) = 1 + x \qquad \text{(tangente ad } f(x) \text{ in } x_0 = 0)$$

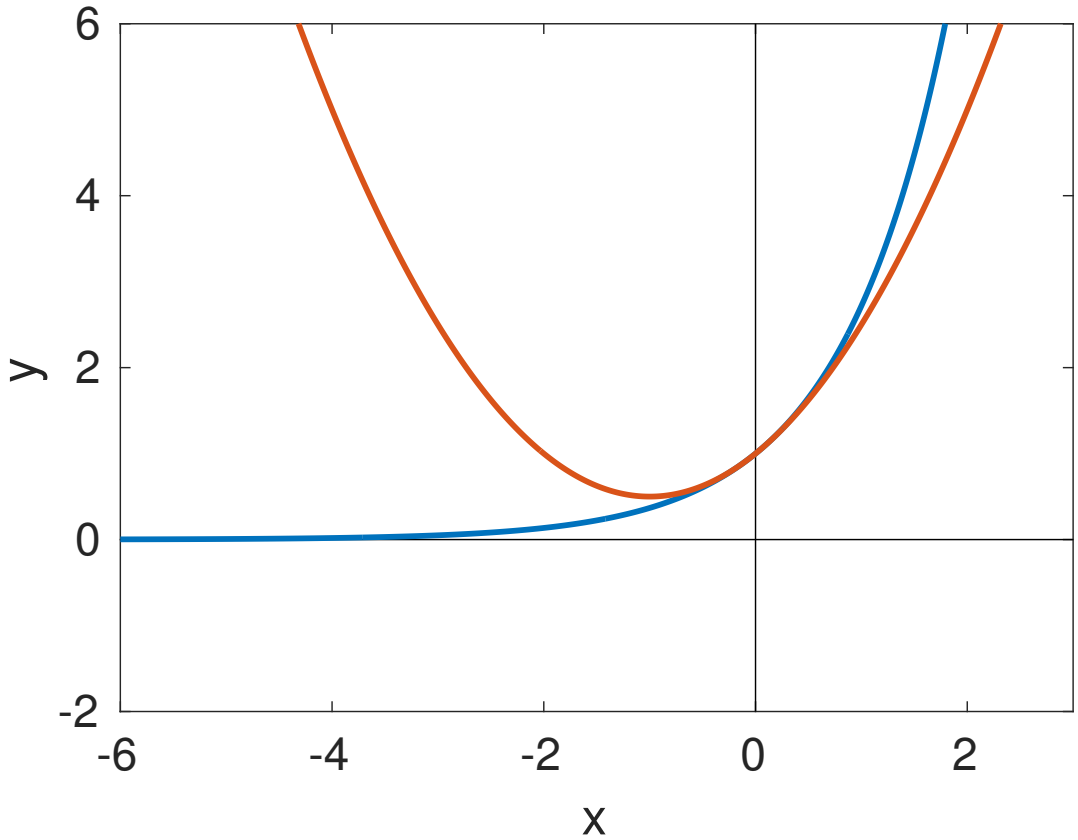


Si ha: $f(0) = p_1(0)$, $f'(0) = p_1'(0)$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

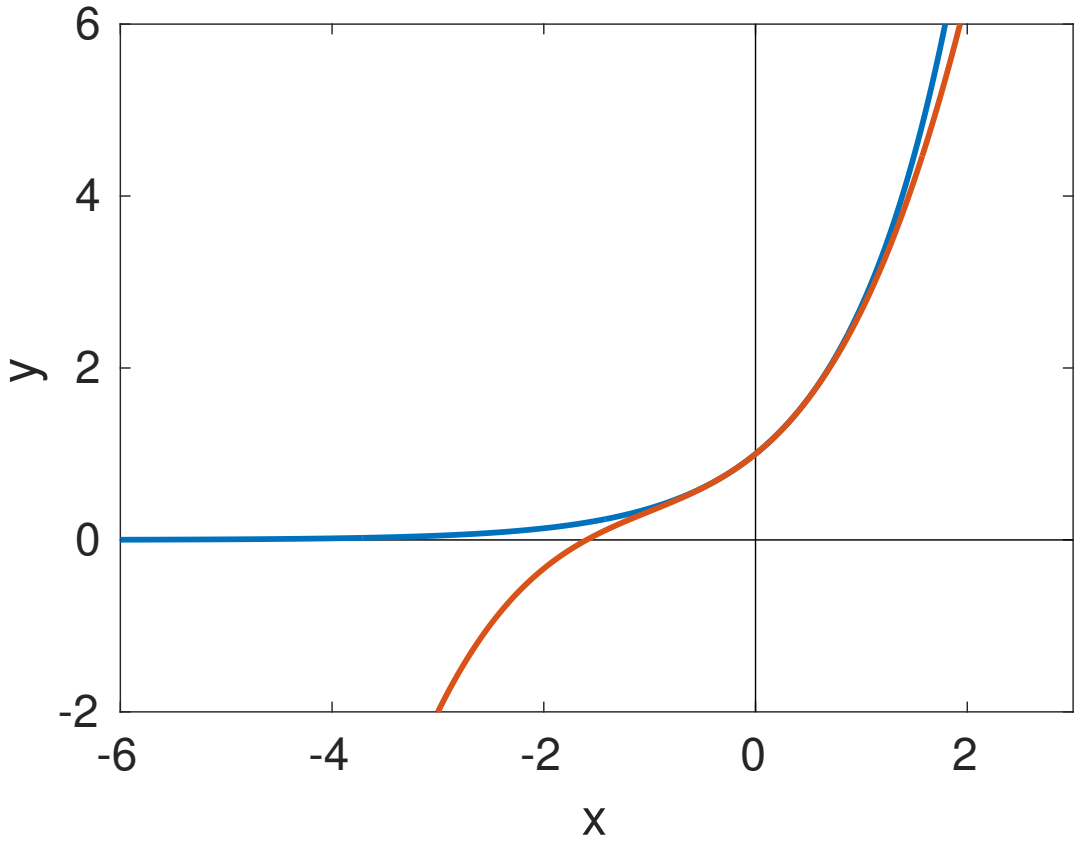
$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$



Si ha: $f(0) = p_2(0)$, $f'(0) = p_2'(0)$, $f''(0) = p_2''(0)$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

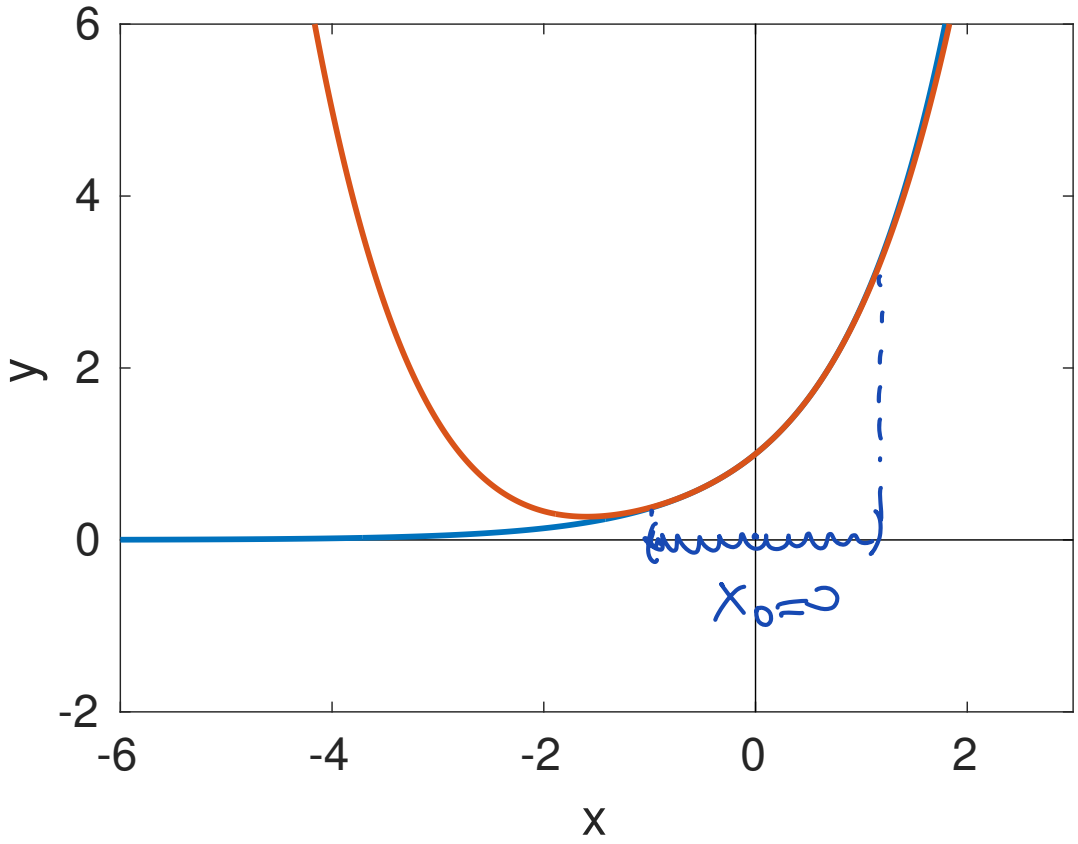
$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$



Si ha: $f(0) = p_3(0)$, $f'(0) = p_3'(0)$, $f''(0) = p_3''(0)$,
$f^{(3)}(0) = p_3^{(3)}(0)$

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo:

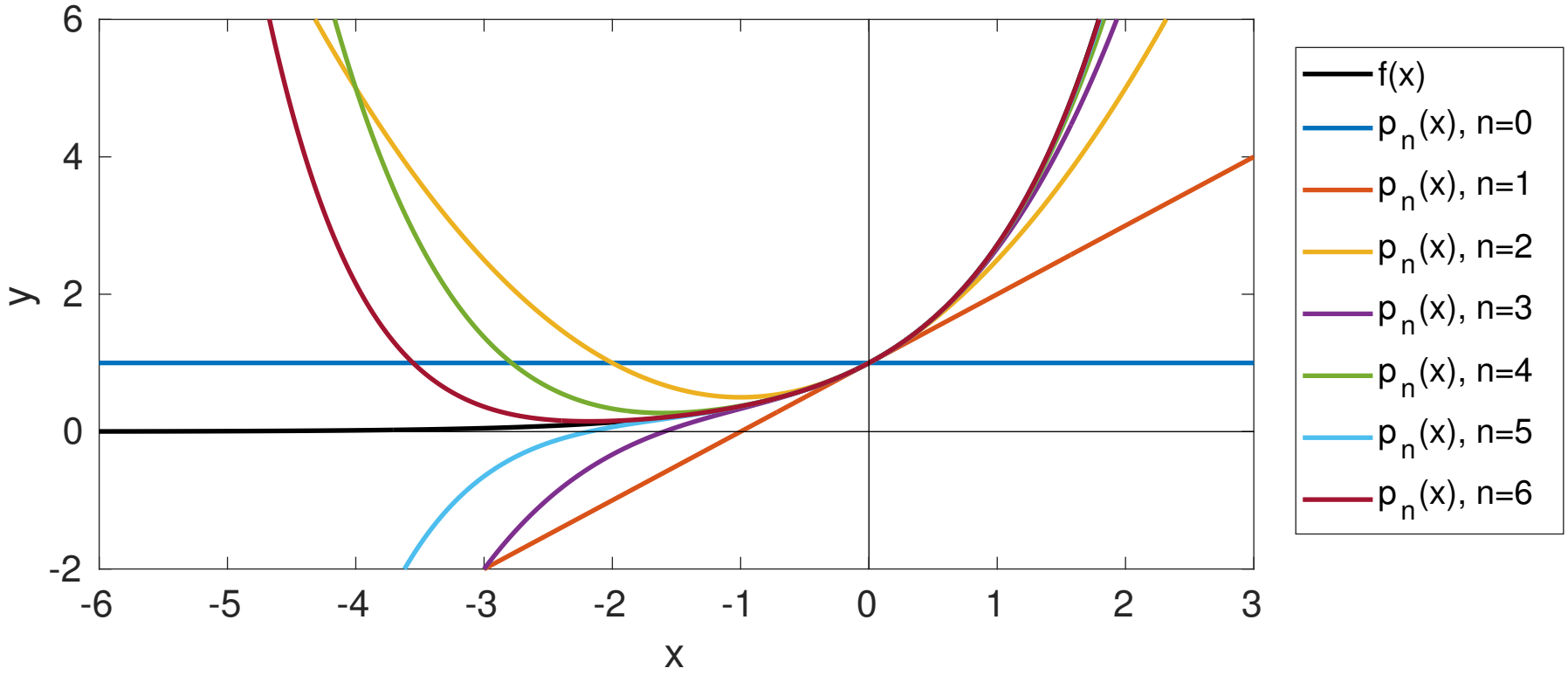
$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$



Si ha: $f(0) = p_4(0)$, $f'(0) = p_4'(0)$, $f''(0) = p_4''(0)$,
$f^{(3)}(0) = p_4^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0) = p_4^{(4)}(0)$,

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e il punto $x_0 = 0$.
Costruiamo vari polinomi: $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$:

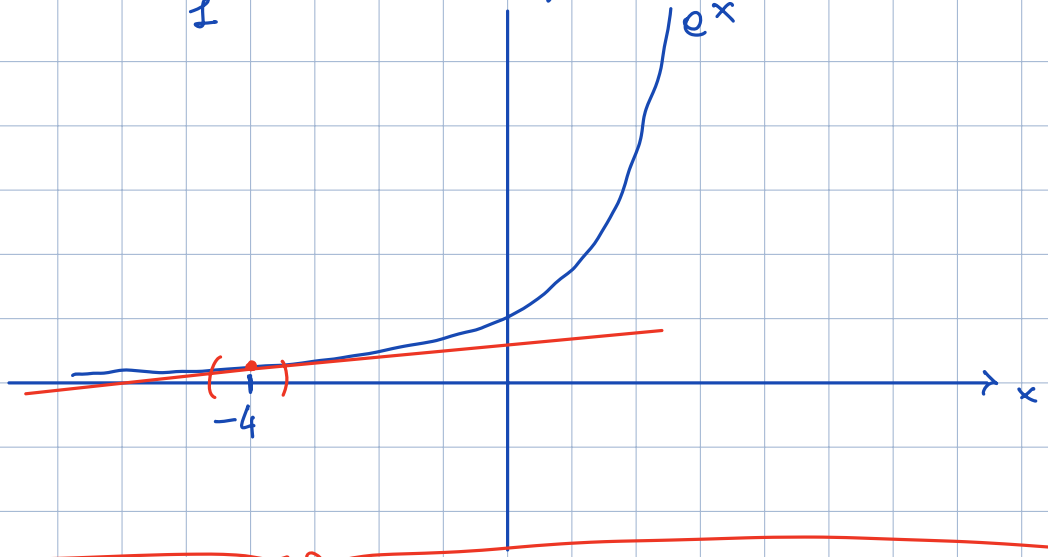
$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$



Costruire il polinomio di Taylor di grado 1 che approssima $f(x)=e^x$ in un intorno di $x_0=-4$

$$P_1(x)=\sum_{k=0}^{1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\frac{f^{(0)}(-4)}{0!}(x+4)^0+\frac{f^{1}(-4)}{1!}(x+4)^1$$

$$=\frac{e^{-4}}{1}\cdot 1+e^{-4}(x+4)=e^{-4}x+5\cdot e^{-4}$$



$f(x)=e^x$, $x_0=0$? $P_n(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots+\frac{1}{n!}x^n$

$$P_8(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{8!}x^8$$

Determinare il pol di Taylor di grado 5 che approssima $f(x)=\sin x$ in un intorno di $x_0=0$

? $P_5(x)=\sum_{k=0}^{5}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=$ (*)

$f(x)=\sin x$ $\quad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$ $\quad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\quad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $\quad f'''(0)=-1$

$f^{IV}(x)=+\sin x$ $\quad f^{IV}(0)=0$

$f^{V}(x)=+\cos x$ $\quad f^{V}(0)=1$

(*) $= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{V}(0)}{5!}(x-0)^5$

$= 0 + \frac{1}{1}\cdot x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5$

$\Rightarrow P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$ con $x_0 = 0$

$f(x) = \sin x$ funzione dispari

$\Rightarrow$ il pol di Taylor centrato in $x_0 = 0$ avrà solo potenze di grado dispari

$P_6(x) = P_5(x)$

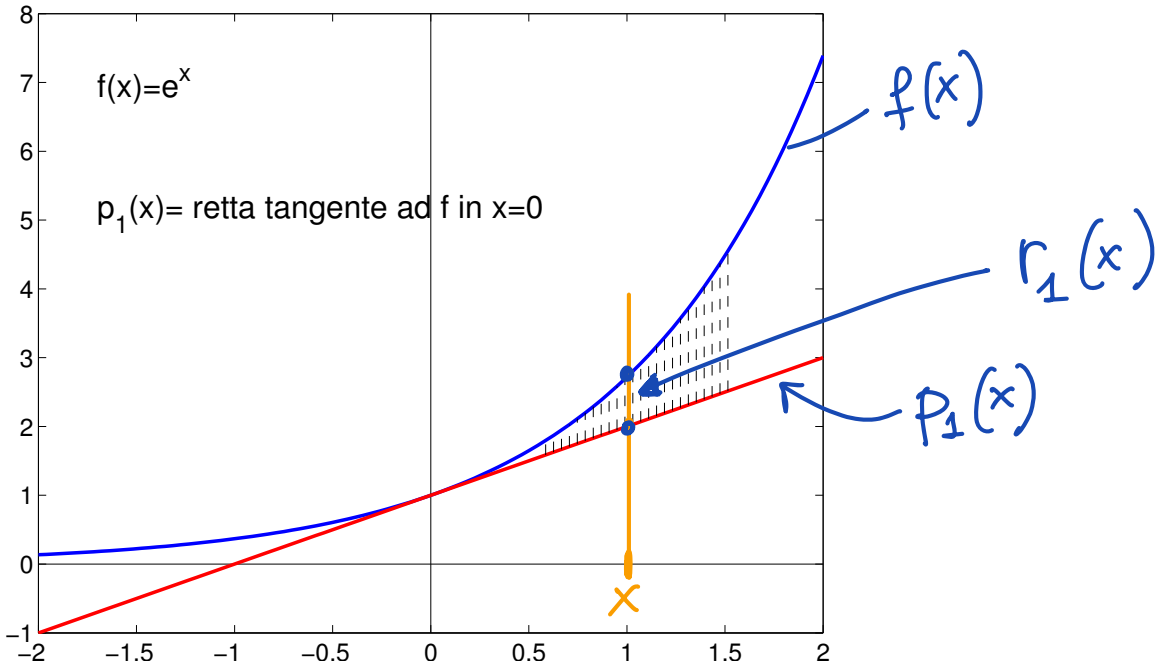
$f(x) = \cos x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad n = 4$ calcolare da soli

$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$

Errore di approssimazione, resto di Taylor

Dati f, x_0, n e $x \in I(x_0)$

QUANTO $p_n(x)$ APPROSSIMA BENE $f(x)$?



$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ è il RESTO di Taylor di ordine n nel punto x

$r_n(x)$ è tanto più piccolo quanto più x è vicino a x_0, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} r_n(x) = 0$$

Teorema (sviluppo di Taylor, con resto di Peano)

Teorema. Sia f definita in $I(x_0)$. Sia $n \geq 0$ e sia f continua e derivabile n volte in x_0. Sia

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0 e sia

$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ il resto di ordine n, con $x \in I(x_0)$.

Allora $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$. $\equiv \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Osservazione. Segue che

$$f(x) = p_n(x) + \overbrace{o((x - x_0)^n)}^{r_n(x)} \text{ per } x \to x_0.$$

$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ è detto resto nella forma di Peano

Esempio

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0 \qquad \underline{n = 5}$

$P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \qquad r_5(x) = o\left((x-0)^5\right) = o(x^5)$

$$f(x) = P_5(x) + r_5(x)$$

$$\sin x = \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right] + o(x^5)$$

se $n = 3$ $\quad P_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 \qquad r_3(x) = o(x^3)$

$$\sin x = \left[x - \frac{1}{3!}x^3\right] + o(x^3)$$

so che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
ma in questo contesto è una informazione che aiuta poco

Es $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^4} = (*)$

Scrivo il pol di Taylor di $f(x) = \sin x$ centrato in $x_0 = 0$, ma di che grado?

Provo con $n=1$, poi $n=3$ e poi $n=5$

$$\sin x = \underbrace{x}_{P_1(x)} + o(x) \qquad (a) \qquad (n=1)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \qquad (b) \qquad (n=3)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5) \qquad (c) \qquad (n=5)$$

al posto di $\sin x$

(a) $= \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)-x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^4}$? non chiaro

scelta non accurata, non dà risposta

(b) al posto di $\sin x$: $= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x^4}$

parte principale; posso trascurarlo

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3!x} = \infty$

$\pm$ dipende se lim sx o dx

(c) al posto di $\sin x$: $= \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)-x}{x^4} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^4} = \infty$

Qui è aver usato grado 5 non aggiunge alcuna informazione in + rispetto ad usare grado 3.

ES: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\frac{\sin x}{x}-1}$

$x_0 = 0$

data e^x, $x_0=0$ $\quad p_1(x) = 1+x \quad \Rightarrow e^x = p_1(x)+r_1(x)$

$= 1+x+o(x)$

Numeratore $= e^x - 1 = \underbrace{1+x+o(x)}_{=e^x} - 1 = x+o(x)$

(posso dire che $e^x - 1 \sim x$ quando $x \to 0$?) Sì

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ $\equiv$ $e^x - 1 = x + o(x)$ per $x \to 0$

se non metto il resto — se metto il resto

Denominatore $= \frac{\sin x}{x} - 1$ –

So che $\frac{\sin x}{x} \to 1$ quando $x \to 0$

Dire che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ equivale a dire che

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$ o

equivalentemente che $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

Segue che $\frac{\sin x}{x} - 1 \to 0$ per $x \to 0$

o equivalentemente $\frac{\sin x}{x} - 1 = o(1)$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\frac{\sin x}{x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{o(1)}$$

→ non dà alcuna informazione precisa, se non solo che $\to 0$ per $x \to 0$

Attenzione che $\frac{\sin x}{x} - 1$ non è zero esatto, ma tende a zero per $x \to 0$

Se invece di approssimare $\sin x$ con x (cioè con il polinomio di grado 1), approssimo $\sin x$

con il polinomio di grado 3

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)$$

e $$\frac{\sin x}{x} - 1 = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + o(x^2) - 1$$

← parte principale ben definita

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\frac{\sin x}{x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{-\frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-\frac{1}{3!}x^2} = \infty .$$

Sviluppi di Maclaurin

Se $x_0 = 0$ lo sviluppo di Taylor prende il nome di sviluppo di Maclaurin e diventa

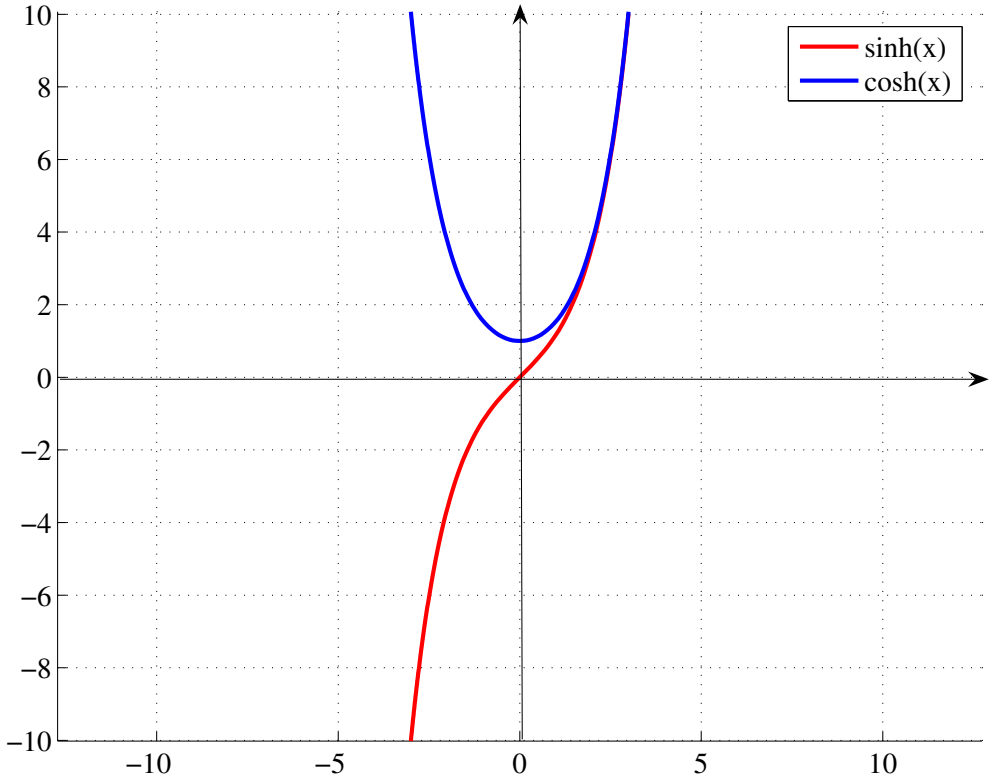
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

Funzioni iperboliche

$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



La relazione fondamentale tra sinh e cosh è:

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

$\sinh(\theta)$ e $\cosh(\theta)$ sono dette funzioni iperboliche perchè un punto $P = (x_P, y_P)$ del piano cartesiano con $x_P = \cosh(\theta)$ e $y_P = \sinh(\theta)$, al variare di θ appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

Si ha: $D(\sinh(\theta)) = \cosh(\theta)$ e $D(\cosh(\theta)) = \sinh(\theta)$,
o equivalentemente:
$D(\sinh(x)) = \cosh(x)$ e $D(\cosh(x)) = \sinh(x)$

Inoltre, dalla definizione si ottiene:

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sviluppi di Maclaurin notevoli

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad f(0) = 0 \quad x_0 = 0 \quad n = 5$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = \cosh x \quad f'''(0) = 1$

$f^{IV}(x) = \sinh x \quad f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \cosh x \quad f^{V}(0) = 1$

$$P_5(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{V}(0)}{5!}x^5$$

$$= 0 + 1\cdot x + 0 + \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$P_5(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \quad (f(x) = \sinh x)$$

$f(x) = e^x \qquad P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$

$f(x) = \cosh x \qquad P_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$

? sviluppi di $f(x) = \log(1+x)$ con $x_0 = 0$ e $n = 3$

$f(x) = \tan(x)$ con $x_0 = 0$ $\quad n = 5$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

dove

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ n \geq 1$$

Teorema (di Taylor, resto di Lagrange)

Teorema. Sia f continua e derivabile n volte in x_0 con derivata n-sima continua. Sia inoltre derivabile $n+1$ volte in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Sia $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ il il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0, allora $\exists\, \xi$ tra x e x_0:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ e}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$r_n(x)$ è detto resto nella forma di Lagrange.

Calcolare il limite: $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{1/3} - 1}{\sin(x)}$ sfruttando i polinomi di Taylor.

Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)}$ sfruttando i polinomi di Taylor.

Il limite deve essere calcolato per $x \to 0$, quindi posso usare gli sviluppi di MacLaurin.

$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Calcolare il limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)}$ sfruttando i polinomi di Taylor.

Il limite deve essere calcolato per $x \to 0$, quindi posso usare gli sviluppi di MacLaurin.

$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) - 1}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x + o(x)}{x - o(x)} = \frac{1}{3}.$$

Canuto Tabacco, Cap. 7.

Esercizi: Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 2 delle seguenti funzioni nell'intorno del punto x_0 riportato:

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \log(x)$, $x_0 = 2$
3. $f(x) = x \log(x)$, $x_0 = 1$
4. $f(x) = \tan(x)$, $x_0 = \pi/3$
5. $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = -1$

Esercizi: Si possono svolgere tutti i limiti che compaiono nei temi d'esame degli anni precedenti. La maggior parte di essi richiede l'uso dei polinomi di Taylor. Alcuni limiti richiedono anche l'impiego del Teorema di de l'Hôpital.