SERIE NUMERICHE

Serie numerica

Definizione. Sia $a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione definita per $k \geq k_0$.

La sommatoria (di infiniti addendi) $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ è detta serie di termine generale a_k.

Oss. 1. $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ è la somma di tutti i termini a_k della successione.

Oss. 2. Assegnata la successione a_k si vuole capire se la somma di tutti i suoi addendi $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ (sono in numero infinito) è un valore finito, o è infinito, o è un qualcosa di indeterminato.

Esempio. $a_k = \dfrac{1}{2^k}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

Cos'è la somma di tutti gli addendi? Un valore finito? Infinito?

Successione delle somme parziali (o delle ridotte)

La succ. a_k con $k \geq k_0$ è nota (prendiamo per ora $k_0 = 0$) e definiamo una nuova successione s_n detta successione delle somme parziali o delle ridotte:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

Abbiamo:

$$s_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 \qquad s_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k = a_0 + a_1$$

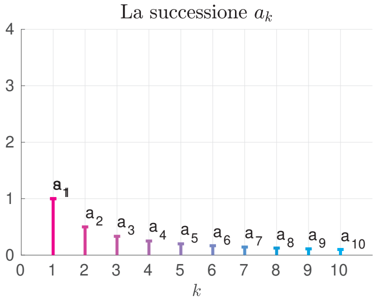
$$s_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k = a_0 + a_1 + a_2 \qquad \ldots$$

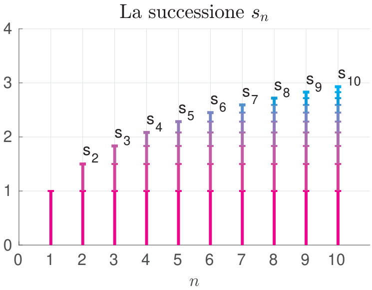
$$s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

Osserviamo che:

$$s_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = s_{n-1} + a_n$$

$$a_k = \frac{1}{k}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$





$$\begin{aligned} s_{10} &= a_1 + \ldots + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Somma della serie

Più in generale, se $k_0 \neq 0$, la **successione delle ridotte** è $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$.

Abbiamo (formalmente) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=k_0}^{n} a_k}_{s_n} = \lim_{n\to\infty} s_n}$

Definizione. $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ è detta **serie**,

a_k è il **termine generale** della serie.

Definizione. Se esiste (finito o infinito) $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, esso è detto

somma della serie e si ha $\boxed{\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = s = \lim_{n\to\infty} s_n}$,

cioè **la somma della serie, coincide con il limite della successione s_n.**

Caratterizzazione di una serie

Definizione. Data la successione $\{a_k\}_{k\geq k_0}$ e la successione delle ridotte $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$,

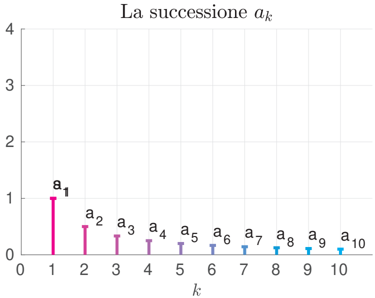
- se esiste $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, si dice che la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge

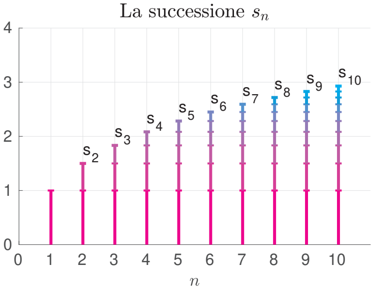
- se esiste $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, si dice che la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ diverge

- se NON esiste $\lim_{n\to\infty} s_n$, si dice che la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ è indeterminata

Oss. L'obiettivo principale sarà quello di stabilire il comportamento della serie. Qualora la serie converga, solo in pochi casi si riesce a precisare il valore della somma s.

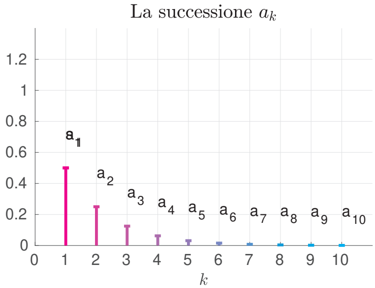
$$a_k = \frac{1}{k}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

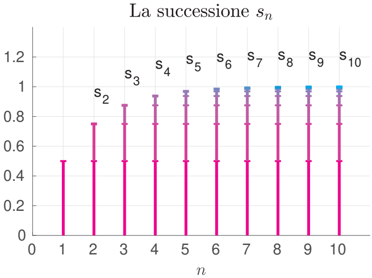




$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è detta **serie armonica**, dimostreremo che diverge.

$$a_k = \frac{1}{2^k}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$





$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ è un esempio di **serie geometrica**, dimostreremo che questa particolare serie converge.

Esempi di serie convergenti, divergenti, indeterminate

Esempio 1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ è convergente e $s = 2$ (serie geometrica).

Esempio 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k$ è divergente. In particolare si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ e } \lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

(verficare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ per alcuni valori di n, Gauss intuì questa formula all'età di 10 anni...)

Esempio 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ è indeterminata. Si ha

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \text{Quindi } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Il comportamento di una serie non cambia se si aggiunge o toglie o modifica un numero finito di termini.

Esempio: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ e $\displaystyle\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ convergono entrambe.

Osservazione. Se la serie è convergente e si aggiunge (o si toglie o si modifica) un numero finito di termini, allora la somma della serie cambia.

Esempio: Se so che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2,$

allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$

SERIE TELESCOPICHE

Definizione. Una serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ si dice **telescopica** se esiste una successione b_k tale che $a_k = b_{k+1} - b_k$.

Proprietà delle serie telescopiche. Data una serie telescopica, vale:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_{k_0}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=k_0}^{n} a_k = (b_{k_0+1} - b_{k_0}) + (b_{k_0+2} - b_{k_0+1}) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) \\ &= b_{n+1} - b_{k_0}. \end{aligned}$$

Quindi: $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_{k_0}.$

Una serie telescopica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{\log(k+1)}_{b_{k+1}} - \underbrace{\log k}_{b_k}\right]$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = \\ &= \lim_{n\to\infty} \log(n+1) - \log 1 = +\infty\end{aligned}$$

La serie diverge.

Un'altra serie telescopica: la serie di Mengoli

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}}$$

$$a_k = \frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \underbrace{\left(-\frac{1}{k+1}\right)}_{b_{k+1}} - \underbrace{\left(-\frac{1}{k}\right)}_{b_k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) + 1 = 1$$

La serie di Mengoli è convergente e la sua somma è 1

Condizione necessaria per le serie convergenti

Teorema. Sia $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ una serie convergente. Allora $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dim. Sia $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{n} a_k$. Per definizione di somma parziale s_k, si ha $s_k = s_{k-1} + a_k$, ovvero $a_k = s_k - s_{k-1}$. Calcolo $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = s - s = 0$.

Osservazione. Attenzione, il viceversa NON è vero.

Si consideri la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

$a_k = \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$. $\quad \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0$ eppure

abbiamo visto che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è divergente.

Teorema di linearità.

Siano $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ due serie e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$$

Esempio.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3}{k(k+1)} - \frac{5}{2^k} \right] = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

La serie geometrica

Proposizione. Sia $q \in \mathbb{R}$ fissato. Si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{è indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Dim. Se $q \neq 1$ vale l'identità

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

$|q| < 1$. $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}$$

(ricordo che q^n è la succ. geometrica, è infinitesima se $|q| < 1$)

$q = 1.$ $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = (n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

$q > 1.$ Vale ancora

$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Stavolta $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ (succ. geometrica, diverge se $q > 1$) quindi

$\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{\infty - 1}{q-1} = +\infty.$

$q \leq -1.$ $\nexists \lim_{n\to\infty} q^n$, quindi $\nexists \lim_{n\to\infty} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, ovvero la serie è indeterminata.

SERIE A TERMINI POSITIVI

Def. Una serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ si dice a termini positivi (t.p.) se $a_k \geq 0$, $\forall k \geq k_0$.

Proposizione. Sia $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ una serie a t.p.. Allora essa converge o diverge (non può essere indeterminata).

Dim. Abbiamo $s_{n+1} = \sum_{k=k_0}^{n+1} a_k = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ per ogni $n \geq k_0$, poichè $a_k \geq 0$.
Allora la succ. s_n è monotona crescente e per il teorema delle successioni monotonone, s_n converge oppure diverge.

Criterio del confronto

Siano $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ due serie a t.p. e sia

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \forall k \geq k_0.$$

Allora:

1) se $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge e $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$

2) se $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ diverge.

Dim. Basta applicare il teorema del confronto per successioni alle successione delle ridotte: $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=k_0}^{n} b_k$.

Criterio del confronto asintotico

Siano $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ e $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ due serie a t.p., con $b_k > 0$ ed esista $\ell \in (0, +\infty)$ tale che $a_k \sim \ell b_k$ per $k \to \infty$ (cioè a_k e b_k hanno lo stesso comportamento asintotico quando $k \to \infty$).
Allora le corrispondenti serie hanno lo stesso comportamento:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ conv } \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \text{ conv}$$

La serie armonica

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}} \qquad \text{diverge}$$

Dim. Applichiamo il criterio del confronto asintotico alle serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Sono entrambe a termini positivi.

$$a_k = \tfrac{1}{k} \quad \sim \quad \log\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) = b_k \qquad \text{per } k \to \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \sim \quad \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\text{diverge} \qquad \Leftarrow \qquad \text{diverge}$$

Quindi: la serie armonica diverge.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge

Dim. Applichiamo il criterio del confronto asintotico alle serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (la serie di Mengoli). Sono entrambe a termini positivi.

$$a_k = \frac{1}{k^2} \quad \sim \quad \frac{1}{k(k+1)} = b_k \qquad \text{per } k \to \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \sim \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$$

$$\textit{converge} \quad \Leftarrow \quad \textit{converge}$$

Quindi: la serie data converge.

Serie armonica generalizzata

È la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}, \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \lambda > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

se $\lambda = 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

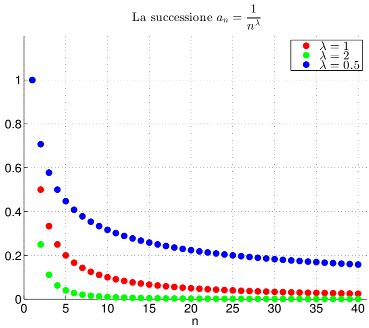
se $\lambda = 2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente.

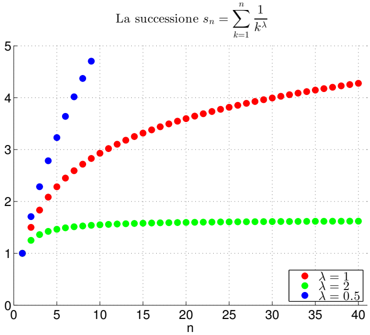
se $\lambda = 1/2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente.

se $\lambda = 3/2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ è convergente.

se $\lambda = -2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$ è divergente.

3 esempi di serie Armonica generalizzata





La successione s_n delle ridotte converge per $\lambda > 1$ e diverge per $\lambda \leq 1$, pur essendo le successioni a_n tutte infinitesime.
Affinchè la successione delle ridotte converga (e quindi anche la serie corrispondente), la successione a_n deve andare a zero abbastanza velocemente per $n \to \infty$, ovvero avere ordine di infinitesimo maggiore di 1.

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Sono serie del tipo

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k b_k}_{a_k}, \qquad \text{con } b_k > 0, \quad \forall k \geq k_0$$

Criterio di Leibniz. Sia $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k b_k$ una serie a termini alterni.

Se 1) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$ e

2) b_k è monotona decrescente,

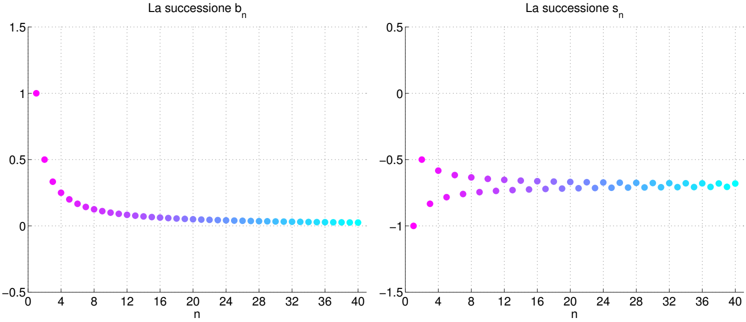
allora $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k b_k$ è convergente.

Inoltre, denotando con s la somma della serie e con $r_n = |s - s_n|$ il resto n-simo della serie, vale

$$r_n = |s - s_n| \leq b_{n+1} \qquad \forall n \geq k_0.$$

Esempio

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ soddisfa le ipotesi del Criterio di Leibniz ($b_k = 1/k$), quindi converge.



SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI

Def. Si dice che la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente se è convergente la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$.

Esempio. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ converge assolutamente.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge, ma NON converge assolutamente.

Def. Se una serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge, ma non converge assolutamente, si dice che essa converge semplicemente.

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ converge semplicemente.

Criterio di convergenza assoluta

Se $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge e

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|.$$

Oss. Il viceversa non è vero, si veda $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ è detta serie armonica a segni alterni.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ una serie a termini strett. positivi e si supponga che

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\begin{array}{lll}
1) & \text{se } \ell < 1 & \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ converge} \\
2) & \text{se } \ell > 1 & \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ diverge} \\
3) & \text{se } \ell = 1 & \Rightarrow \text{ non si può concludere}
\end{array}$$

Criterio della radice

Sia $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ una serie a termini positivi e si supponga che

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\begin{array}{lll}
1) & \text{se } \ell < 1 & \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ converge} \\
2) & \text{se } \ell > 1 & \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ diverge} \\
3) & \text{se } \ell = 1 & \Rightarrow \text{ non si può concludere}
\end{array}$$

Altre serie da ricordare

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\beta}} : \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} : \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha = 1,\ \beta > 1 \\ & \text{oppure se } \alpha > 1,\ \forall \beta \\ \text{diverge} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Approfondimenti

Criterio di condensazione di Cauchy. Sia $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ una serie a t.p. e sia a_k una succ. decrescente. Allora

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ converge.}$$

Esempio. Si determini il comportamento della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$.

Il termine generale della serie è $a_k = \frac{1}{k^{3/2}}$. La succ. a_k è decr. e a t.p..
Per il criterio di condensazione di Cauchy si ha che
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{3/2}}$ converge. Quindi studiamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^{3/2})^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/2}}\right)^k.$$

Questa è una serie geometrica con $q = 1/\sqrt{2}$. Poichè $|q| = |1/\sqrt{2}| < 1$, la serie
$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{3/2}}$ converge.

Per il criterio di condensazione di Cauchy, anche la serie data $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge.

Approfondimenti

La serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \lambda > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Per dimostrare questo risultato, sfruttiamo il fatto che sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente e che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente.

Distinguiamo tre casi:

1. $\lambda < 1$ (si dimostra con il criterio del confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$),
2. $\lambda > 2$ (si dimostra con il criterio del confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$),
3. $1 < \lambda < 2$ (si dimostra con il criterio di Cauchy)

Riferimenti bibliografici

Canuto Tabacco (ed. Springer): cap. 5.5
Canuto Tabacco (ed. Pearson): cap. 11.2

Esercizi: vedere

`paola-gervasio.unibs.it/Analisi1/serie.pdf`
`paola-gervasio.unibs.it/Analisi1/esercizi3.pdf`
`calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi2/materiale.html`