

teorema di unicità del limite

$$\underbrace{\text{Se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l}_{P \text{ ipotesi}} \Rightarrow \underbrace{l \text{ è unico}}_{Q \text{ tesi}}$$

Dim. utilizzo la tecnica di dim per assurdo

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow R \wedge \neg R$$

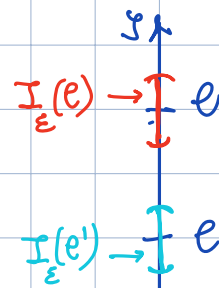
$$\wedge = e$$

$$\neg = \text{non}$$

Considero il caso in cui x_0 e l sono numeri reali

$$\neg Q, \text{ cioè nego la tesi: } \neg Q = " \exists l' \in \mathbb{R}, l' \neq l : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' "$$

$$P \text{ è l'ipotesi valida, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



$$\epsilon = \frac{1}{2} \text{ quando}$$

$$r = 1 \text{ quando}$$

$$\text{chiamo con } r = \frac{|l - l'|}{2}$$

$$\text{osservo che } \underbrace{\forall \epsilon < r \text{ e } \epsilon > 0 \text{ si ha } I_\epsilon(l) \cap I_\epsilon(l') = \emptyset}_{R}$$

$$P \wedge \neg Q \Rightarrow R \quad \text{se assumo che valgano } P \text{ e } \neg Q \text{ allora trovo che vale anche } R$$

$$\text{adesso mostro } R \wedge \neg Q \Rightarrow \neg R$$

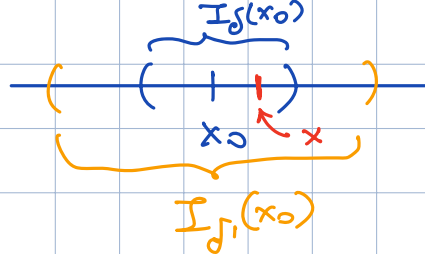
$$\text{Ricordo che } R = \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ cioè}$$

$$\forall I_\epsilon(l) \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom}(f) \cap (\underline{I_\delta(x_0)} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I_\epsilon(l)$$

$$\text{Ora scrivo cosa vuol dire } \neg Q = \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' \neq l$$

$$\forall I_\epsilon(l') \exists I_{\delta'}(x_0) : \forall x \in \text{dom}(f) \cap (\underline{I_{\delta'}(x_0)} \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I_\epsilon(l')$$

$$\text{Osservo che } I_\delta(x_0) \text{ e } I_{\delta'}(x_0) \text{ sono intervalli della stessa famiglia}$$



quindi $I_{\delta}(x_0) \cap I_{\delta'}(x_0) \neq \emptyset$

prendo una x che esiste in $(I_{\delta}(x_0) \cap I_{\delta'}(x_0)) \setminus \{x_0\}$

allora $f(x) \in I_{\varepsilon}(e)$ per ipotesi $\mathcal{P}$.

e contemporaneamente $f(x) \in I_{\varepsilon}(e')$ per la negazione di $\mathcal{Q}$

$$\Rightarrow f(x) \in I_{\varepsilon}(e) \cap I_{\varepsilon}(e') \Rightarrow I_{\varepsilon}(e) \cap I_{\varepsilon}(e') \neq \emptyset$$

Ho trovato che per un certo ε (con $0 < \varepsilon < r$) si ha $I_{\varepsilon}(e) \cap I_{\varepsilon}(e') \neq \emptyset$

questa è la negazione di $\mathcal{R}$. $\neg \mathcal{R}$

Ho quindi dimostrato che $\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R} \wedge \neg \mathcal{R}$

e questo equivale ad aver dimostrato $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

c.v.d.

Teorema di permanenza del segno

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l. \quad \text{se } l > 0}_{\text{P}} \Rightarrow \underbrace{\exists I(x_0) : f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}}_{\substack{\text{Q} \\ \text{teri}}}$$

Dim Faccio la dim solo per il caso $l \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$

Scrivo la def di limite con le disuguaglianze

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom}(f), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

poiché $l > 0$ per ipotesi, posso scegliere $\varepsilon = l$

prendo l'ultima disug. della definizione $|f(x) - l| < \varepsilon$
e la riscrivo con $\varepsilon = l$, ho

sciolgo il modulo

$$-l < f(x) - l < l$$

$$+l \quad +l \quad +l$$

$$\text{otengo } 0 < f(x) < 2l$$

$$\left| \begin{array}{c} |x| < r \\ \hline \begin{array}{ccc} (- & | &) \\ -r & 0 & r \end{array} \\ \hline -r < x < r \end{array} \right.$$

cioè $f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f) : 0 < |x - x_0| < \delta$ cioè

$$\underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}}$$

Quindi ho trovato la teri, a patto di prendere $I(x_0)$ esattamente uguale a $I_\delta(x_0)$.

c.v.d.

Dimo del corollario. (uso la tecnica p. ant $\neg Q \Rightarrow \neg P$)

$$P = '\exists I(x_0) : f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}'$$

$$Q = 'l \geq 0'$$

Nego la tesi: $\neg Q = 'l < 0'$. Per il teorema delle p.m. del

$$\text{regno, se } l < 0 \Rightarrow \exists I(x_0) : f(x) < 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

sto negando il fatto che $f(x) \geq 0$ in
 $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

cioè ho $\neg P$.

di conseguenza ho l'assunto, cioè negare la tesi porta
ad una contradd. Di conseguenza la tesi è valida.

c.v.d.

Primo thm del confronto

Ip: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

$$\exists I(x_0) : f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Ts: $l_1 \leq l_2$

Dim: dimostro solo il caso con $x_0, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

Definisco $h(x) = g(x) - f(x)$

calcolo $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - f(x)) \stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$$= l_2 - l_1 \in \mathbb{R}$$

(perché ho preso $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$)

Per ip $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$
 $\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Ho visto che $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ esiste ed è $= l_2 - l_1$

Per il coroll al thm della p. del segno, segue che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \geq 0$$

da cui segue che $l_2 - l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \geq 0$

cioè $l_2 \geq l_1$

c.v.d.