Teorema di unicità:

Se $\underbrace{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}}_{P} \Rightarrow \underbrace{\ell \text{ è unico.}}_{Q}$ $\left(\equiv \text{ se } \exists\, \ell' = \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ deve succedere che } \ell' = \ell\right)$

Dim: (caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$)

utilizzo la tecnica dimostrativa: $\underbrace{P \wedge \neg Q}_{\text{ip.}} \Rightarrow \underbrace{R \wedge \neg R}_{\text{tesi}}$

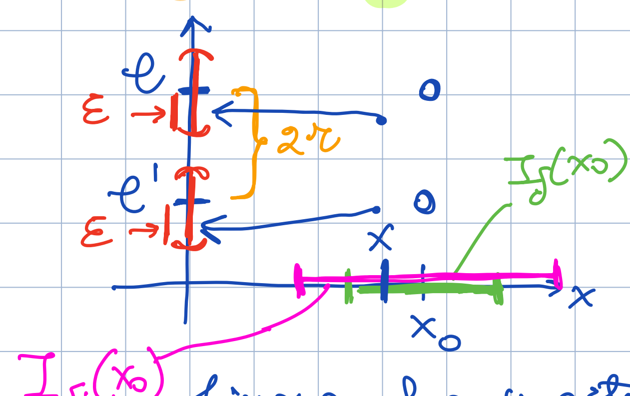
R è una proposizione introdotta durante nella dim

Esplicito l'ipotesi P:

(ℓ) $\forall I_\varepsilon(\ell)\ \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom}(f) \cap (I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

Suppongo che sia vero $\neg Q$, cioè che $\exists\, \ell' \neq \ell$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell'$, quindi

(ℓ') $\forall I_\varepsilon(\ell')\ \exists I_{\delta'}(x_0) : \forall x \in \text{dom}(f) \cap (I_{\delta'}(x_0) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell')$



$$\boxed{\text{prendo } \varepsilon < \frac{|\ell' - \ell|}{2} = r \quad \Rightarrow I_\varepsilon(\ell) \cap I_\varepsilon(\ell') = \emptyset} \quad = R$$

finora ho mostrato che da $P \wedge \neg Q$ discende R
cioè $P \wedge \neg Q \Rightarrow R$

Adesso mostro che $P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg R$

Considero $I_\delta(x_0)$ e $I_{\delta'}(x_0)$, hanno lo stesso centro, quindi la loro intersezione è $\neq \emptyset$ e hanno anche intersezione non vuota con dom(f).

Prendo una $x \in \text{dom}(f) \cap (I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap (I_{\delta'}(x_0) \setminus \{x_0\})$

$\Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell) \cap I_\varepsilon(\ell')$, cioè $I_\varepsilon(\ell) \cap I_\varepsilon(\ell') \neq \emptyset$.

Ho dimostrato che $\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(\ell) \cap I_\varepsilon(\ell') \neq \emptyset} \equiv \neg R$

Ho dimostrato che $P \wedge \neg Q \Rightarrow R \wedge \neg R$
cioè una contraddizione, questo vuol dire che assumere $\neg Q$ è falso, quindi Q è vero.

c.v.d

$\lim_{x \to 4} f(x) = 5$ $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$

non posso essere entrambi veri

Teorema di permanenza del segno

Ip: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}})$; $\ell > 0$

Ts: $\exists I(x_0) : f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Dim (caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$) $(P \Rightarrow Q)$

Riscrivo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con la definizione con le disug.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in dom(f)$ e $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Per ipotesi so che $\ell > 0$, tra tutti gli $\varepsilon > 0$ che posso utilizzare per la def di limite, scelgo $\varepsilon = \ell$ e riscrivo l'ultimo pezzo della def di limite:

$$|f(x) - \ell| < \cancel{\varepsilon =} \ell$$

$|x| < r$

$-r < x < r$

cioè

$$-\ell < f(x) - \ell < \ell$$

$+\ell \qquad +\ell \qquad +\ell$

$$0 < f(x) < 2\ell$$

cioè $f(x) > 0 \quad \forall x \in dom(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

con $I_\delta(x_0)$ dipendente da $\varepsilon = \ell$.

Ho trovato un intorno per cui vale $f(x) > 0 \ \forall x \in$ a quell'intorno

c.v.d

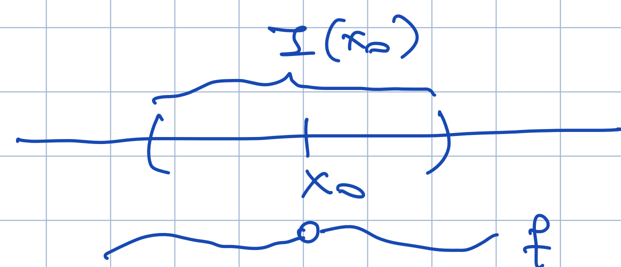
Corollario al thm di permanenza del segno

Ip: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$; $\exists I(x_0) : f(x) \geq 0 \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Ts: $\ell \geq 0$

Dim $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\neg Q$ = negazione della tesi vuol dire $\ell < 0$,
allora per il thm della permanenza del segno
$\exists I(x_0) : f(x) < 0 \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$



e questo contraddice l'ipotesi che $f(x)$ fosse ≥ 0 in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Ho trovato che $\neg Q \Rightarrow \neg P$
la negazione della tesi comporta la negazione dell'ipotesi.
Questo è un assurdo e quindi la tesi è soddisfatta

c.v.d.

Primo teorema del confronto

Ip: ① $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, ② $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$,

③ $\exists\, I(x_0) : f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Ts: $\ell_1 \leq \ell_2$

Dim. $(x_0 \in \mathbb{R} , \ \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R})$

Definisco $h(x) = g(x) - f(x)$, osservo che per l'ip ③
$h(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$
Voglio applicare il corollario al thm della p. del segno alla funzione h. Quindi verifico che h soddisfi le ip del corollario.
Mi chiedo se $\exists \lim_{x \to x_0} h(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di} \\ h(x)}}{=} \lim_{x \to x_0} \left(g(x) - f(x) \right) \underset{AL}{=} \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) =$$

$(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ non ho forme indet$)$

$$= \ell_2 - \ell_1 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell_2 - \ell_1 \geq 0$ per il corollario,

cioè $\ell_2 \geq \ell_1$ (tesi)

c.v.d.