Integrale di una funzione limitata su un intervallo illimitato

Def. Sia $I = [a, +\infty) \subset \mathbb{R}$, sia f localmente integrabile su I secondo Riemann e sia $\mathcal{F}_a(x)$ la funzione integrale di $f(t)$ (ricordo che $\mathcal{F}_a(a) = 0$). L' integrale improprio di f su $[a, +\infty)$ è

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\mathcal{F}_a(x)} = \lim_{x\to+\infty} \mathcal{F}_a(x)$$

1. Se il limite esiste finito, diciamo che f è integrabile in senso improprio su I o che il suo integrale improprio converge
2. se il limite esiste infinito, diciamo che l'integrale improprio di f è divergente
3. se il limite NON esiste, diciamo che l'integrale improprio di f è oscillante

Esempi

Verificare utilizzando la definizione che:

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x} dx & \text{è convergente} \\
\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx & \text{è divergente} \\
\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x) dx & \text{è oscillante}
\end{array}
$$

Criterio del confronto

Spesso non è possibile calcolare esplicitamente la funzione integrale di una funzione f data (ad es. $f(x) = e^{-x^2}$ non è integrabile elementarmente), però si riesce comunque a stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge o diverge.

Teorema (Criterio del confronto). Siano f e g due funzioni localmente integrabili su $I = [a, +\infty)$, t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. **Allora**

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Inoltre:

se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**, allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ **diverge**,

se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ **converge**, allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **converge**.

Esempio

L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

CONVERGE.

$e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per ogni $x \in [1, +\infty)$.

So che $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$, inoltre $e^{-x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Allora

$$0 \leq \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq e^{-1}$$

Integrali su $(-\infty, b]$ e sy $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Se f è limitata e localmente integrabile su $I = (-\infty, b]$, l'integrale improprio di f su I è definito come

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)dt.$$

Se f è limitata e localmente integrabile su $\mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$, allora l'integrale improprio di f su $\mathbb{R}$ è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

SE esistono finiti i due integrali impropri che compaiono a destra ALLORA l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ è convergente