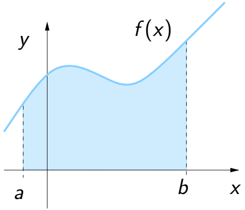
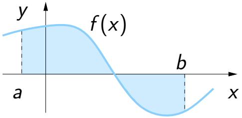
Integrazione definita

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata.
Def. Trapezoide di f sull'intervallo $[a, b]$ è la regione di piano delimitata dall'asse $y = 0$, dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dal grafico di f. Viene indicato con $\mathcal{T}(f; a, b)$.



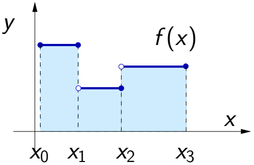


Integrale di Riemann

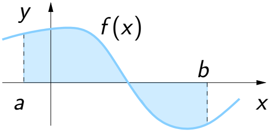
(Bernhard Riemann 1826-1866)

Obiettivo: calcolare l'area del trapezoide $\mathcal{T}(f; a, b)$.
Riemann ha suddiviso il problema in 2 passi.

1. prendere f a scala e definire l'integrale per funz. a scala.

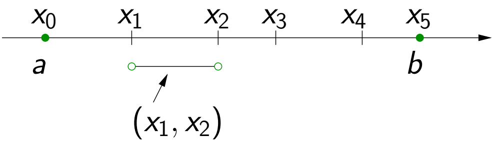


2. prendere f generica limitata e definire l'integrale per funz. limitate sfruttando quello che ha trovato per le funzioni a scala



Suddivisione di un intervallo

Def. Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ e $n \in \mathbb{N}$) $(n+1)$ punti distinti e ordinati in $[a, b]$. Essi inducono una suddivisione di $[a, b]$ in n sottointervalli (x_0, x_1), (x_1, x_2), $\cdots$, (x_{n-1}, x_n).

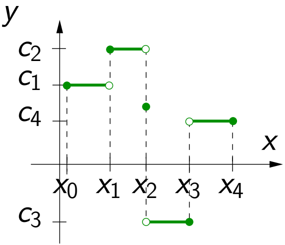


Integrale di Riemann di funzioni a scala

Def. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è detta funzione a scala se esite una suddivisione di $[a, b]$ in n sottointervalli tale che f è costante su ogni sottointervallo, cioè esistono $c_1,\ c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, tali che

$$f(x) = c_k \qquad \forall x \in (x_{k-1}, x_k) \qquad per\ k = 1, \ldots, n$$

(o equivalentemente $f|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k$ per $k = 1, \ldots, n$)



Oss. Nei punti x_k la funzione f può assumere un qualsiasi valore finito reale, non necessariamente coincidente con c_k o c_{k+1}.

Def. Denotiamo con $\boxed{\mathcal{S}([a,b]) = \{\text{funzioni a scala su } [a,b]\}}$

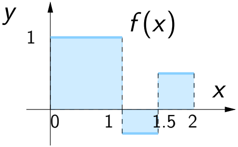
Def. Siano $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i punti di una suddivisione in $[a,b]$ e sia f a scala su $[a,b]$ t.c.

$$f|_{(x_{k-1},x_k)} = c_k \qquad \text{per } k = 1, \ldots, n$$

Si definisce integrale definito della funzione a scala f su $[a,b]$ il numero reale

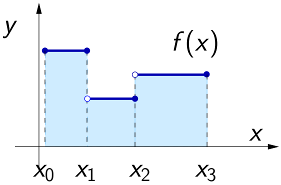
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})}$$

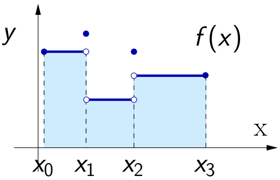
$$f(x) = \begin{cases} 1 & in\ (0,1) \\ -0.4 & in\ (1,1.5) \\ 0.5 & in\ (1.5,2) \end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x)dx = 1.05$$

Oss. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ non dipende dal valore che f assume in un numero finito di punti:

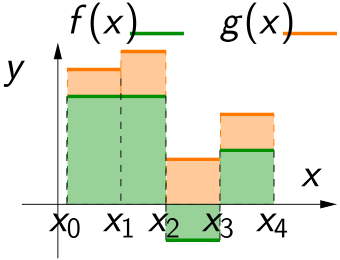




Queste due funzioni hanno lo stesso integrale.

Teorema 1. Siano f, g due funzioni a scala su $[a, b]$ t.c. $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

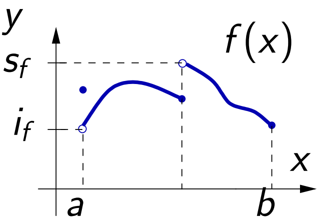


Integrale di Riemann di funzioni limitate

Sia f limitata in $[a, b]$ (non necessariamente continua)

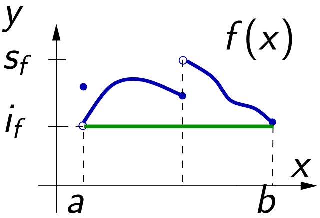
Siano $i_f = \inf_{a \le x \le b} f(x)$ e $s_f = \sup_{a \le x \le b} f(x)$.

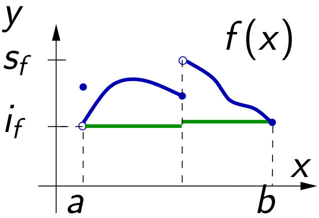
Se f è limitata, allora i_f e s_f sono numeri reali (e quindi finiti).

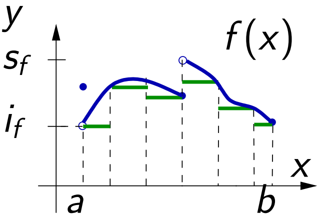


Funzioni a scala minoranti

Def. $\mathcal{S}_f^- = \{g \in \mathcal{S}([a,b]) : \; g(x) \leq f(x), \; \forall x \in [a,b]\}$ è l' insieme delle funzioni a scala g (in verde) che minorano f (in blue).

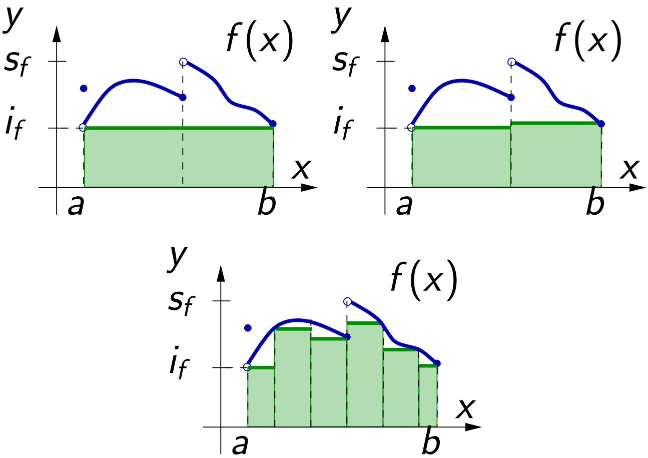






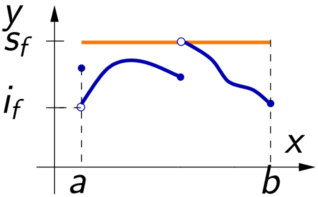
Insieme degli integrali di funzioni a scala minoranti

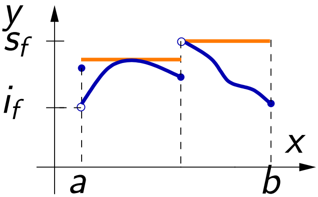
$\mathcal{I}_f^- = \left\{ \int_a^b g(x)dx, \ g \in \mathcal{S}_f^- \right\}$ è l' insieme ($\subset \mathbb{R}$) degli integrali delle funzioni a scala che minorano f.

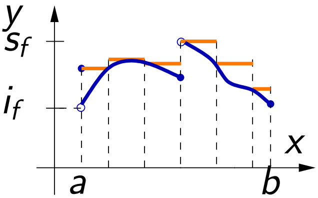


Funzioni a scala maggioranti

Def. $\mathcal{S}_f^+ = \{h \in \mathcal{S}([a,b]) : \; h(x) \geq f(x), \; \forall x \in [a,b]\}$ è l' insieme delle funzioni a scala h (in orange) che maggiorano f (in blue).

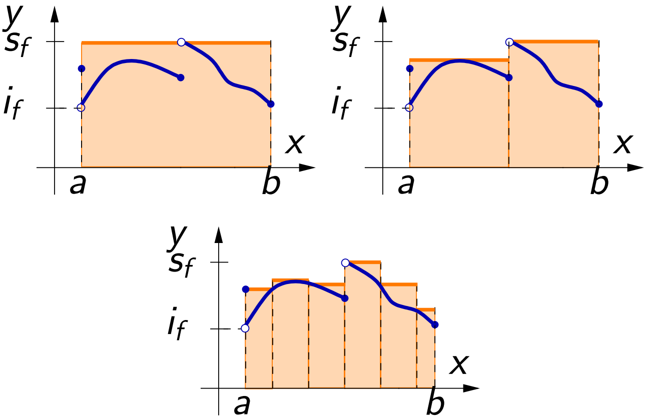




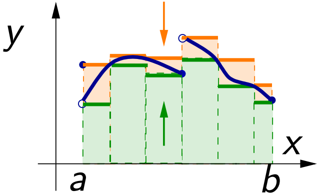


Insieme degli integrali di funzioni a scala maggioranti

$\mathcal{I}_f^+ = \left\{ \int_a^b h(x)dx, \ h \in \mathcal{S}_f^+ \right\}$ è l' insieme $(\subset \mathbb{R})$ degli integrali delle funzioni a scala che maggiorano f.



Integrale inferiore e superiore



Def. Si definisce integrale inferiore di f (limitata) su $[a, b]$ l'estremo superiore dell'insieme $\mathcal{I}_f^-$ degli integrali delle funzioni minoranti f, cioè:

$$I_{inf}(f, a, b) = \sup \mathcal{I}_f^- = \sup \left\{ \int_a^b g(x)dx : \ g \in \mathcal{S}_f^- \right\}$$

Def. Si definisce integrale superiore di f (limitata) su $[a, b]$ l'estremo inferiore dell'insieme $\mathcal{I}_f^+$ degli integrali delle funzioni maggioranti f, cioè:

$$I_{sup}(f, a, b) = \inf \mathcal{I}_f^+ = \inf \left\{ \int_a^b h(x)dx : \ h \in \mathcal{S}_f^+ \right\}$$

Teorema 2. Sia f limitata su $[a, b]$. Allora

$$I_{inf}(f, a, b) \leq I_{sup}(f, a, b)$$

Funzioni integrabili secondo Riemann

Def. Sia f limitata in $[a, b]$. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$ se l'integrale superiore ed inferiore di f coincidono, cioè se

$$I_{inf}(f, a, b) = I_{sup}(f, a, b).$$

In tal caso si definisce integrale definito di f su $[a, b]$ il valore reale finito

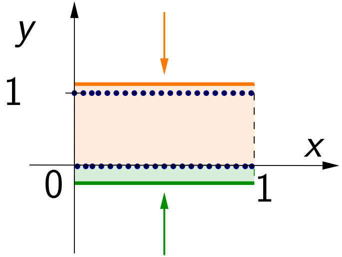
$$\int_a^b f(x)dx = I_{inf}(f, a, b) = I_{sup}(f, a, b)$$

Se $I = [a, b]$, scritture equivalenti sono:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_I f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$



Tutte le funzioni $h(x)$ a scala maggioranti f sono ≥ 1 e tutte le funzioni a scala $g(x)$ minoranti f sono ≤ 0.
Allora $I_{inf}(f,a,b) = \sup \mathcal{I}_f^- = 0$ e $I_{sup}(f,a,b) = \inf \mathcal{I}_f^+ = 1$, sono diversi, quindi **la funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann.**

Classe delle funzioni integrabili (MOLTO IMPORTANTE)

Teorema. Sono integrabili secondo Riemann, su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ le seguenti funzioni:

1. le funzioni continue su $[a, b]$
2. le funzioni limitate su $[a, b]$ e discontinue in un numero finito di punti (discontinuità di tipo salto, eliminabile o seconda specie)
3. le funzioni monotone su $[a, b]$
4. le funzioni monotone a tratti su $[a, b]$ (ovvero per le quali esiste una suddivisione di $[a, b]$ t.c. f è monotona su ogni sottointervallo della suddivisione)

N.B. Se una funzione è monotona o monotona a tratti, allora è integrabile anche se ha infiniti punti di discontinuità, mentre se non è monotona, allora è integrabile solo se ha un numero finito di punti di discontinuità (si veda l'esempio della funzione di Dirichlet).

Prime proprietà dell'integrale di Riemann.

Sia f una funzioni integrabile su $[a, b]$. Allora:

1. f è integrabile su ogni sottointervallo $[c, d] \subset [a, b]$
2. la funzione $|f|$ è integrabile su $[a, b]$

Def. Diciamo che f è localmente integrabile su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (I non necessariamente limitato) se f è integrabile su un qualsiasi intervallo chiuso e limitato contenuto in I.

Def. Sia f integrabile su un intervallo $[a, b]$ e siano $c, d \in [a, b]$ due punti qualsiasi tali che $a \leq c \leq d \leq b$. Poniamo:

$$\int_d^c f(x)dx = -\int_c^d f(x)dx$$

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

Proprietà dell'integrale definito (importante)

Teorema. Siano f e g integrabili su un intervallo chiuso e limitato I. Allora:

1) **Additività**: $\forall a, b, c \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) **Linearità**: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in I$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

3) **Positività**: Se $f \geq 0$ in $[a, b] \subset I$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Inoltre, se f è continua, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \iff f \equiv 0.$

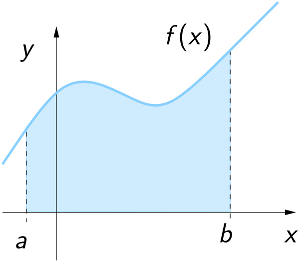
4) **Confronto:** Se $f \leq g$ in $[a, b] \subset I$, allora

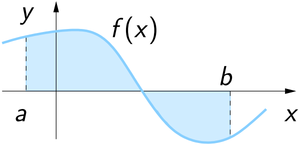
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5) **Maggiorazione:** $\forall a, b \in I$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Area del trapezoide per una funzione integrabile





L'area del trapezoide $\mathcal{T}(f; a, b)$ è: $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

Media integrale

Def. Sia f integrabile su $[a, b]$. Definiamo media integrale (o valor medio) di f su $[a, b]$ il valore reale

$$⨍_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema della media integrale
Sia f integrabile su $[a, b]$. Allora

$$\inf_{a\le x\le b} f(x) \le ⨍_a^b f(x)dx \le \sup_{a\le x\le b} f(x).$$

Inoltre se f è continua su $[a, b]$, allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che $⨍_a^b f(x)dx = f(c)$.

Dimostrazione del teorema della media integrale

Per definizione di inf e sup si ha

$$\inf_{a\leq x\leq b} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$$

e, applicando l'integrale ai tre termini della disuguaglianza si ha:

$$\int_a^b \underbrace{(\inf_{a\leq x\leq b} f(x))}_{costante} dx = (b-a) \inf_{a\leq x\leq b} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq$$

$$\int_a^b \underbrace{(\sup_{a\leq x\leq b} f(x))}_{costante} dx = (b-a) \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$$

Dividendo per $(b-a)$ si ha la tesi.

Se poi f è continua, per Weierstrass si ha $\inf f = \min f = m$, $\sup f = \max f = M$ e $m \leq \fint_a^b f(x)dx \leq M$. Applicando il teorema dei valori intermedi a f sull'intervallo $[x_m, x_M]$ (x_m è un punto di minimo assoluto e x_M è un punto di massimo assoluto) allora f assume tutti i valori compresi tra m e M, ovvero

$\exists c \in [x_m, x_M] \subseteq [a, b] : \ f(c) = \fint_a^b f(x)dx.$

Funzione integrale

Sia f definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia localmente integrabile su I. Sia $x_0 \in I$ fissato. Definiamo Funzione integrale di f la funzione

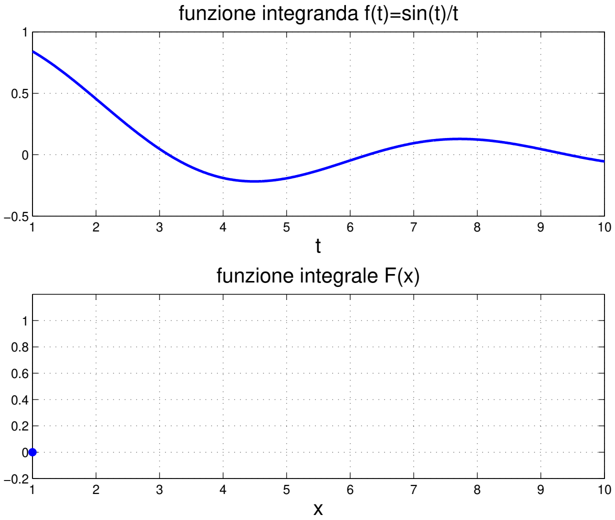
$$\boxed{\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

Oss. Per la definizione di integrale definito, si ha

$$\mathcal{F}_{x_0}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0.$$

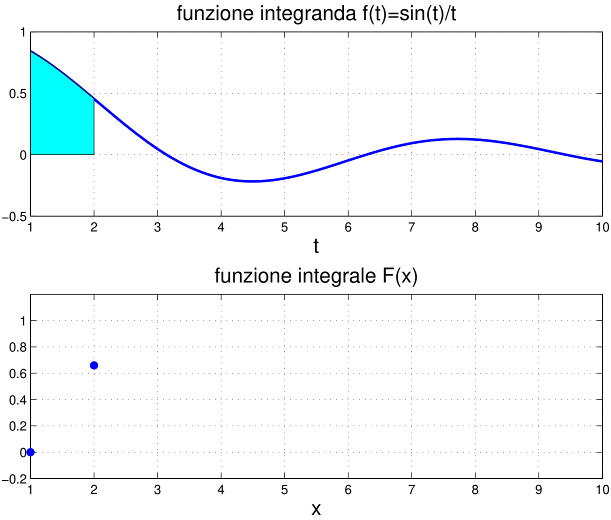
Quando la scelta di x_0 sarà ininfluente, esso verrà omesso dalla scrittura di $\mathcal{F}_{x_0}$. $\mathcal{F}(x)$ starà ad indicare una qualsiasi funzione integrale.

Esempio di funzione integrale



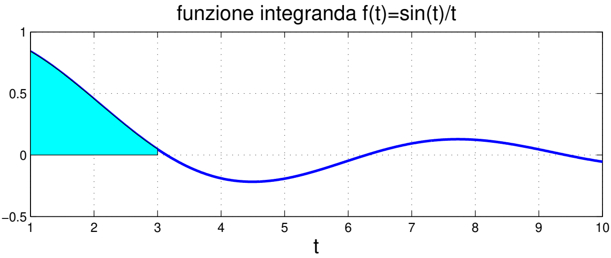
$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad x_0 = 1$$

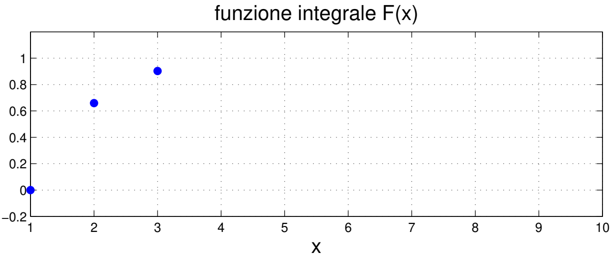
Esempio di funzione integrale



$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

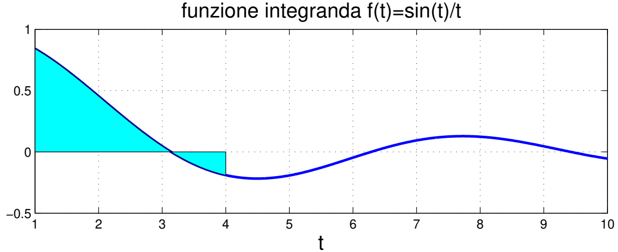
Esempio di funzione integrale

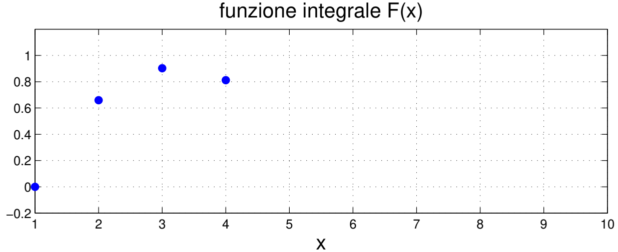




$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

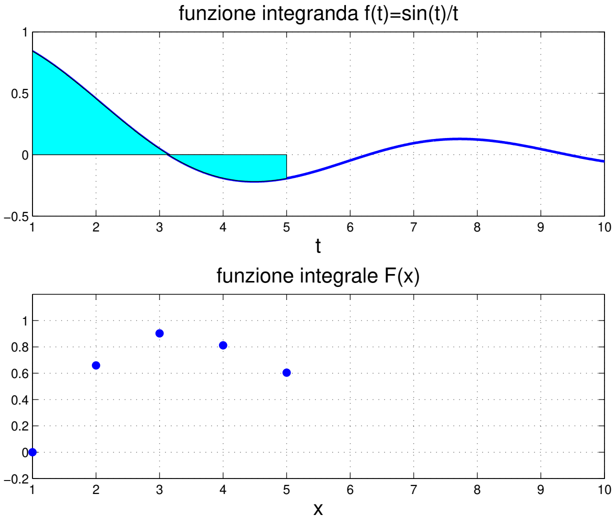
Esempio di funzione integrale





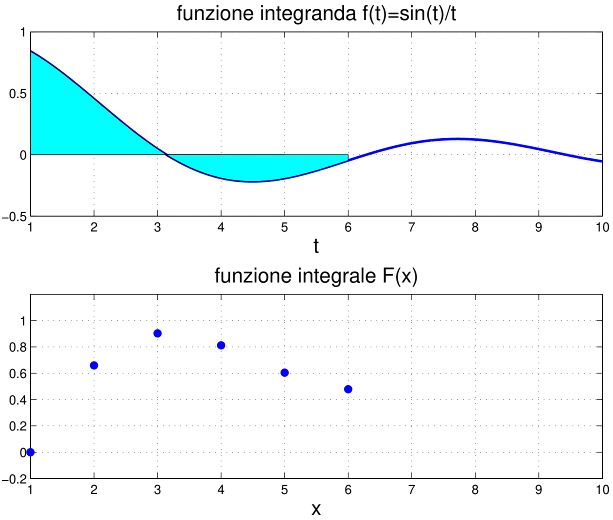
$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Esempio di funzione integrale



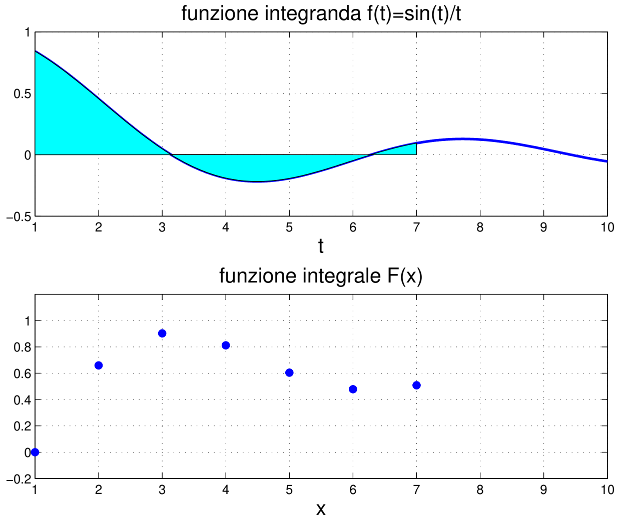
$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Esempio di funzione integrale



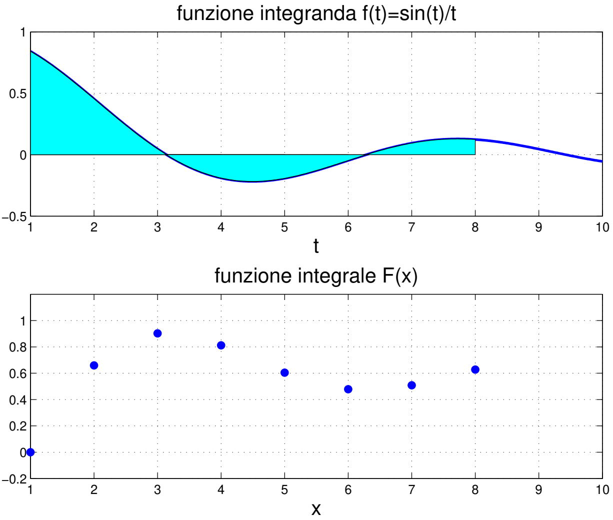
$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Esempio di funzione integrale



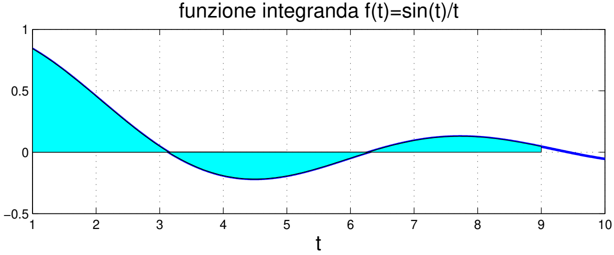
$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

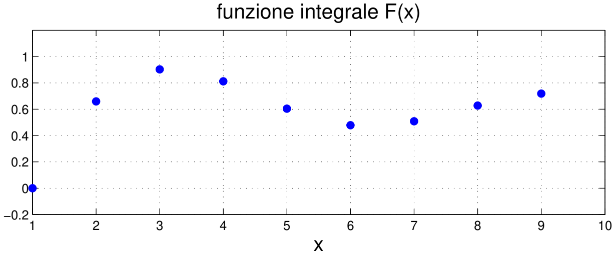
Esempio di funzione integrale



$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

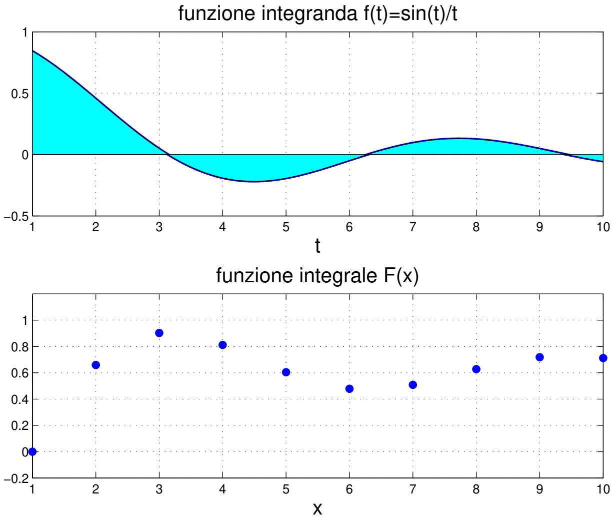
Esempio di funzione integrale





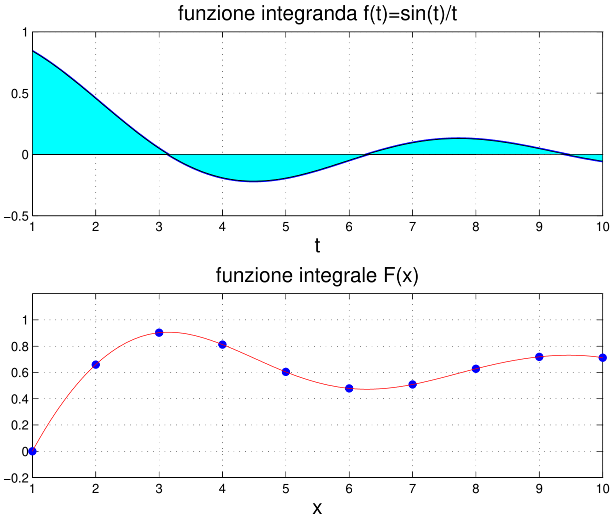
$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Esempio di funzione integrale



$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Esempio di funzione integrale



$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Teorema.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, integrabile e sia $\mathcal{F}(x)$ una funzione integrale di f. Allora:

1) se f è limitata su $[a, b]$, allora $\mathcal{F}$ è lipschitziana su $[a, b]$ ($\Rightarrow \mathcal{F}$ è continua in $[a, b]$).

2) se $f \geq 0$ su $[a, b]$, allora $\mathcal{F}$ è crescente su $[a, b]$

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia x_0 fissato in $[a, b]$ e sia
$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ la sua funzione integrale.
Allora $\mathcal{F}_{x_0}$ è derivabile in $[a, b]$ e si ha

$$\mathcal{F}'_{x_0}(x) = f(x) \qquad , \forall x \in [a, b]$$

ovvero la funzione integrale di f è una primitiva di f su $[a, b]$.

Dim. Sappiamo che $\mathcal{F}_{x_0}$ è derivabile in $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto $\overline{x} \in [a, b]$. Prendo un generico punto $\overline{x} \in [a, b]$ e dimostro che $\mathcal{F}_{x_0}$ è derivabile in $\overline{x}$, cioè che esiste finito
$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{\mathcal{F}_{x_0}(x) - \mathcal{F}_{x_0}(\overline{x})}{x - \overline{x}}$.
Prendo $x > \overline{x}$ (il ragionamento per $x < \overline{x}$ è analogo).

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\overline{x}} \frac{\mathcal{F}_{x_0}(x)-\mathcal{F}_{x_0}(\overline{x})}{x-\overline{x}} &= \lim_{x\to\overline{x}} \frac{1}{x-\overline{x}}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{\overline{x}} f(t)dt\right)\\
&= \lim_{x\to\overline{x}} \frac{1}{x-\overline{x}}\int_{\overline{x}}^{x} f(t)dt\\
&= \lim_{x\to\overline{x}} ⨍_{\overline{x}}^{x} f(t)dt.
\end{aligned}
$$

Per il teorema della media integrale, poichè f è continua,

$$
\exists z\in(\overline{x},x) \text{ t.c. } ⨍_{\overline{x}}^{x} f(t)dt = f(z)
$$

e, sempre perchè f è continua, si ha

$$
\lim_{z\to\overline{x}} f(z) = f(\overline{x}),
$$

quindi

$$
\lim_{x\to\overline{x}} \frac{\mathcal{F}_{x_0}(x)-\mathcal{F}_{x_0}(\overline{x})}{x-\overline{x}} = \lim_{x\to\overline{x}} ⨍_{\overline{x}}^{x} f(t)dt = \lim_{z\to\overline{x}} f(z) = f(\overline{x}).
$$

Poichè f è continua in $[a, b]$, ivi è anche limitata (per Weierstrass) e quindi $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}$. Allora anche $\displaystyle\lim_{x\to\overline{x}} \frac{\mathcal{F}_{x_0}(x) - \mathcal{F}_{x_0}(\overline{x})}{x - \overline{x}} \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{F}'_{x_0}(\overline{x}) = \lim_{x\to\overline{x}} \frac{\mathcal{F}_{x_0}(x) - \mathcal{F}_{x_0}(\overline{x})}{x - \overline{x}} = f(\overline{x}).$$

Poichè $\overline{x}$ era arbitrario in $[a, b]$, concludiamo che $\mathcal{F}_{x_0}$ è derivabile in ogni punto $x \in [a, b]$ e $\mathcal{F}'_{x_0}(x) = f(x)$, cioè $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Corollario. Se $\overline{x}$ è un punto di salto per f allora $\overline{x}$ è un punto angoloso per $\mathcal{F}_{x_0}$.

Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia f continua su $[a, b]$ e sia G una primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$$

Dim. Sia $\mathcal{F}_a(x)$ la funzione integrale $\mathcal{F}_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Il primo teorema fondamentale del calcolo ci garantisce che $\mathcal{F}_a(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Sia G una primitiva qualsiasi e ricordiamo che tutte le primitive di f differiscono di una costante additiva, quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{F}_a(x) = G(x) + c$. Allora

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \mathcal{F}_a(b) = \mathcal{F}_a(b) - \underbrace{\mathcal{F}_a(a)}_{=0} \\ &= (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a)\end{aligned}$$

$\square$

Conseguenza del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

Sia f derivabile in un intervallo I, con derivata continua. Allora per ogni $x, x_0 \in I$, si ha

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

Dim. Se f è in $\mathcal{C}^1(I)$, allora $f(x)$ è una primitiva di $f'(x)$.
Quindi per il corollario al Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0).$$

Isolando $f(x)$, si ha la tesi.

Regole di integrazione

Integrazione per parti

Se $f, g \in C^1([a,b])$, allora

$$\int_a^b f(x)'g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Integrazione per sostituzione

Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$. Sia $f(y)$ continua su $[a,b]$ e sia $F(y)$ una sua primitiva. Allora

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy$$

Se φ è biettiva, allora si ha anche

$$\int_a^b f(y)dy = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Integrazione di funzioni con simmetria

Teorema (utilissimo per evitare conti inutili)

Sia $a \in \mathbb{R}^+$ e sia f integrabile su $[-a, a]$.

Se f è pari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

Se f è dispari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Funzioni integrabili non elementarmente

Alcune funzioni sono integrabili in senso indefinito, cioè sono la derivata di una primitiva, ma la loro primitiva non è esprimibile in termini di funzioni elementari. Diciamo allora che queste funzioni sono integrabili ma non elementarmente.

Esempi:

$$\frac{\sin(x)}{x},\ \frac{\cos(x)}{x},\ \frac{e^x}{x},\ e^{x^2},\ e^{-x^2},\ \frac{\log x}{1+x},\ \cos(x^2),\ \sin(x^2),\ \frac{\cos(x)}{x^2},\ \frac{\sin(x)}{x^2}$$

sono tutte funzioni continue sul loro dominio e quindi integrabili (grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale), ma non possiamo scrivere le loro primitive in termini di funzioni elementari.

Tuttavia la primitiva è sempre esprimibile mediante una funzione integrale.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo contenuto nel dominio di f. Scelto $x_0 \in I$, una primitiva di f è

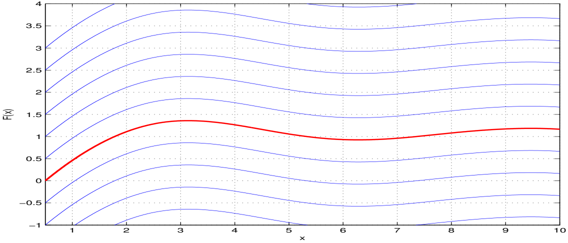
$$F(x) = \mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in I.$$

Esempio

$f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$. Esprimo una qualsiasi primitiva di f come funzione integrale.
Possiamo prendere $x_0 = 1/2 (\neq 0)$. Una primitiva di f è

$$F(x) = \mathcal{F}_{1/2}(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Non aggiungo la costante dell'integrazione indefinita perchè questo è un integrale definito e la scelta del punto $x_0 = 1/2$ fissa una e una sola tra tutte le primitive possibili: quella che in $x = 1/2$ vale 0.



Riferimenti bibliografici

Libro Canuto, Tabacco (ed. Springer). Cap 9.3, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9

Libro Canuto, Tabacco (ed. Pearson). Cap 10.3, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9