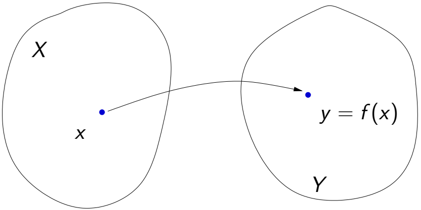
FUNZIONI

Siano X e Y due insiemi.

Def. Una **funzione f definita in X a valori in Y** è una corrispondenza (una legge) che associa ad ogni elemento $x \in X$ al più un elemento y in Y.



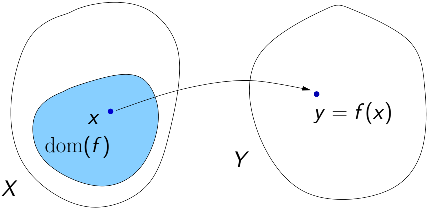
Def. L'insieme Y è detto **codominio** di f.

Es. Siano $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ e $f : x \mapsto y = \dfrac{1}{x}$ (ad un numero reale associo il suo reciproco).

x	4	$\sqrt{2}$	$-2/3$	...	$-e$	...	0
$y = 1/x$	$1/4$	$1/\sqrt{2}$	$-3/2$	...	$-1/e$	...	?

Def. L'insieme degli $x \in X$ a cui f associa uno e un solo elemento $y \in Y$ è detto **dominio** di f e si indica con $\mathrm{dom}(f)$. Si ha $\mathrm{dom}(f) \subseteq X$ e si scrive:

$$f : \mathrm{dom}(f) \subseteq X \to Y.$$



N.B. $\mathrm{dom}(f)$ è l'insieme degli $x \in X$ per i quali la corrispondente y sta in Y.

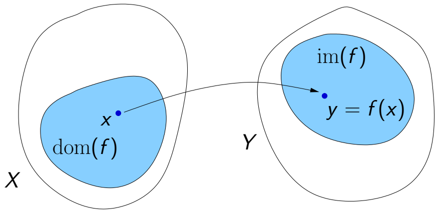
Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$. Se $x \neq 0 \Rightarrow y = 1/x \in \mathbb{R}$

MA $\dfrac{1}{0} \notin \mathbb{R}$, QUINDI $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Oss. $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$, f associa ad x uno e un solo elemento $y \in Y$.

Immagine

Def. L'unico elemento $y \in Y$ associato ad un elemento $x \in \mathrm{dom}(f)$ si dice immagine di x attraverso f e si scrive $y = f(x)$ (oppure $f : x \mapsto y = f(x)$).



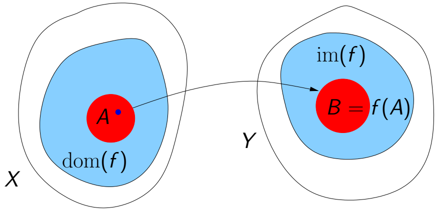
Def. L'insieme $\mathrm{im}(f) = \{y \in Y : \exists x \in \mathrm{dom}(f) : y = f(x)\}$ è detto immagine di f. Si ha l'inclusione: $\mathrm{im}(f) \subseteq Y$.

Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$.

$y = 1/4$ è l'immagine di $x = 4$ mediante f.

L'insieme immagine è: $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Def. Dato $A \subset \text{dom}(f)$, l'insieme
$B = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$ è detto immagine di A attraverso f e si può scrivere $B = f(A)$.



Es. $f(x) = 1/x$ con $A = \{1, 3/2, 2\}$.
L'insieme $B = f(A) = \{1, 2/3, 1/2\}$

Def. L'insieme

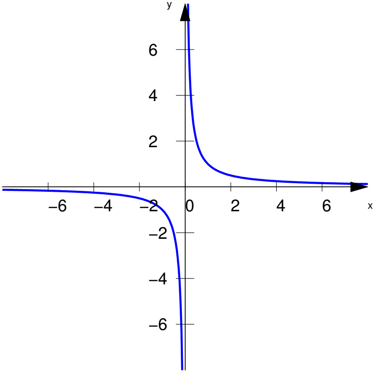
$$G(f) = \{(x, y) | \ x \in \mathrm{dom}(f), \ e \ y = f(x) \in \mathrm{im}(f)\} \subset X \times Y$$

è detto **grafico** di f.

Es. $f(x) = 1/x$ con $X = Y = \mathbb{R}$.

$X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =$ piano cartesiano.

$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x\}$

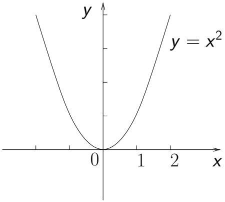


Def. Una funzione si dice **reale** se $Y = \mathbb{R}$.

Def. Una funzione si dice **a variabile reale** se $X = \mathbb{R}$.

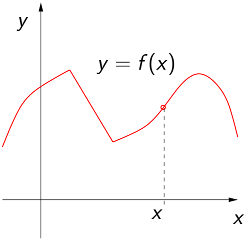
Il grafico di una funzione reale a variabile reale è l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano tali che $y = f(x)$.

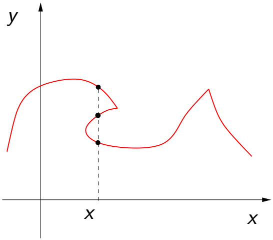
Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = x^2$



Esempi di grafici

A sinistra è rappresentato il grafico di una funzione $y = f(x)$:
ad una x corrisponde un solo punto del grafico e quindi una ed una sola $y = f(x)$





Il grafico a destra non può rappresentare una funzione $y = f(x)$, in quanto esistono delle x a cui corrispondono 2 o 3 punti del grafico e quindi 2 o 3 y differenti, e ciò contraddice la definizione di funzione $f : x \mapsto y = f(x)$

Controimmagine

Def. Sia $y \in Y$, la **controimmagine di** y **attraverso** f è l'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) = y\} \subseteq \mathrm{dom}(f).$$

Es. Considerando la funzione di prima $f(x) = \dfrac{1}{x}$, la controimmagine del valore $y = 3$ è

$$f^{-1}(3) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ 1/x = 3\} = \{1/3\}$$

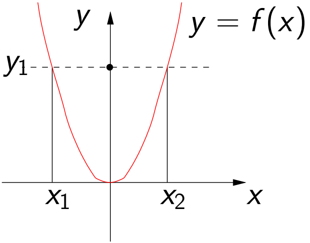
La controimmagine di $y = 0$ è

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ 1/x = 0\} = \emptyset$$

Non c'è alcun valore reale x tale che $1/x = 0$.

Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{im}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

? $f^{-1}(4)$

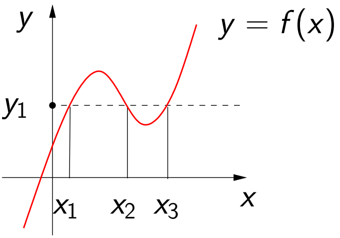


$$f^{-1}(4) = \{x \in \mathbb{R} : \; x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$

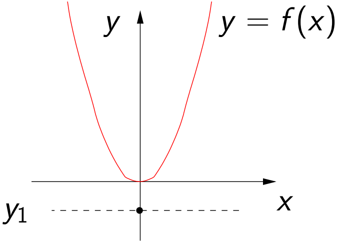
f suriettiva

Def. Una funzione si dice **suriettiva** se $\mathrm{im}(f) = Y$, ovvero se ogni elemento di Y ha per controimmagine un insieme non vuoto, ovvero ogni elemento di Y è l'immagine di almeno un elemento di $\mathrm{dom}(f)$.

Esempi



SURIETTIVA:
$\mathrm{im}(f) = Y = \mathbb{R}$

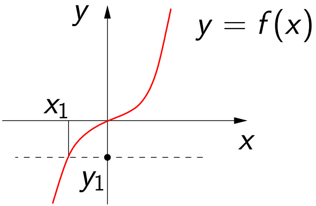


NON SURIETTIVA:
$\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \ \ Y = \mathbb{R}$

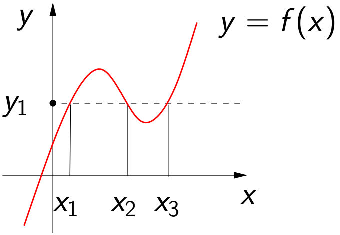
f iniettiva

Def. Una funzione si dice **iniettiva** se ogni elemento di $\mathrm{im}(f)$ è immagine al più di un elemento di $\mathrm{dom}(f)$, o equivalentemente se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esempi



INIETTIVA:
$f^{-1}(y_1) = \{x_1\}$



NON INIETTIVA:
$f^{-1}(y_1) = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, o
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_1$

f biettiva

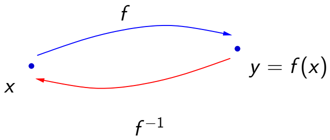
Def. Una funzione f si dice **biunivoca** o **biettiva** se è sia iniettiva che surettiva, ovvero ogni elemento $y \in Y$ è immagine di uno e uno solo elemento $x \in \text{dom}(f)$.

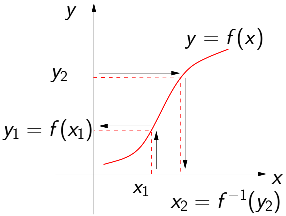
Osservazione: Sia $D = \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$.
Se invece di considerare $f : D \to \mathbb{R}$, consideriamo $f : D \to \text{im}(f)$, automaticamente abbiamo f suriettiva (facciamo coincidere il codominio con $\text{im}(f)$).
Per definizione di $\text{im}(f)$, ad ogni elemento $y \in \text{im}(f)$ corrisponde almeno un elemento $x \in D : \; y = f(x)$.

Funzione inversa

Sia $D = \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Considero una funzione $f : D \to \mathrm{im}(f)$ (quindi suriettiva).

Def. Se una funzione f è iniettiva sul suo dominio, possiamo costruire una funzione che ad ogni elemento $y \in \mathrm{im}(f)$ associa l'unico elemento x dell'insieme controimmagine.



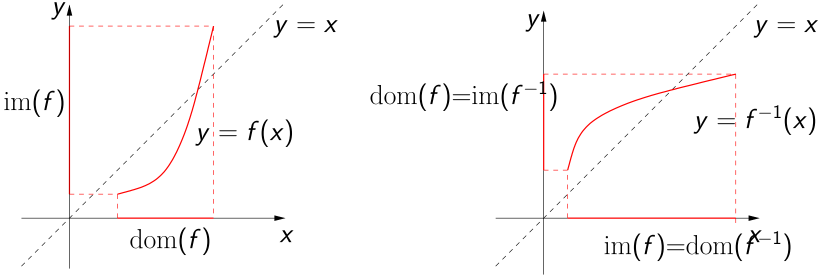


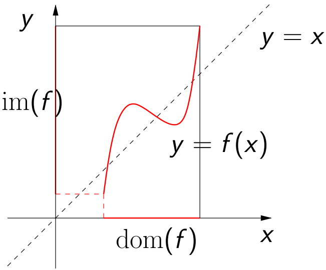
Tale funzione è detta funzione inversa di f, viene indicata con f^{-1}

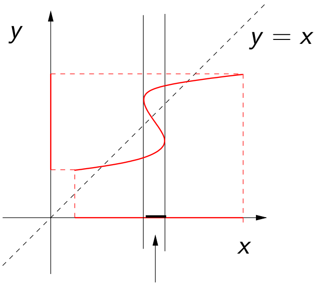
Funzione inversa

$$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f), \qquad \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$$

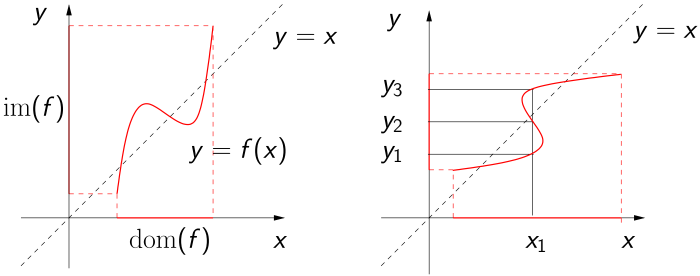
Grafico della funzione inversa







$y = f(x)$ NON è iniettiva e **NON** è invertibile,
ovvero la curva a destra non è il grafico di alcuna funzione,
ad una x corrisponde più di una y



$f(x)$ NON è iniettiva e **NON** è invertibile,
ovvero la curva a destra non è il grafico di alcuna funzione,
ad una x corrisponde più di una y

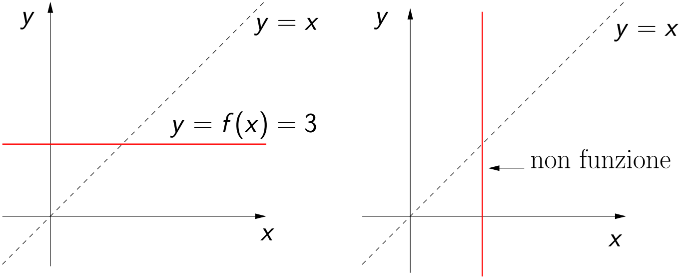
Quindi:

$f : D \to \mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è suriettiva e iniettiva.

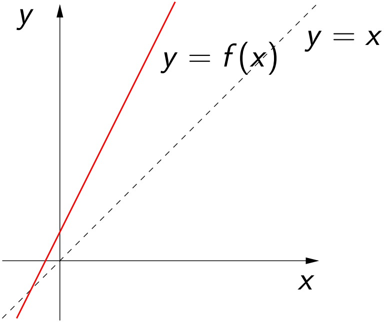
$f : D \to \text{im}(f)$ è invertibile se e solo se è iniettiva (è già suriettiva su $\text{im}(f)$).

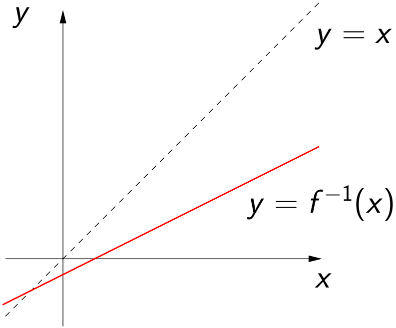
NOTA: quando analizzeremo l'invertibilità, considereremo sempre $f : D \to \text{im}(f)$

Esempio: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \text{im}(f)$, $f(x) = 3$ NON è invertibile sul suo dominio; ($\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{im}(f) = \{3\}$, f NON è iniettiva)



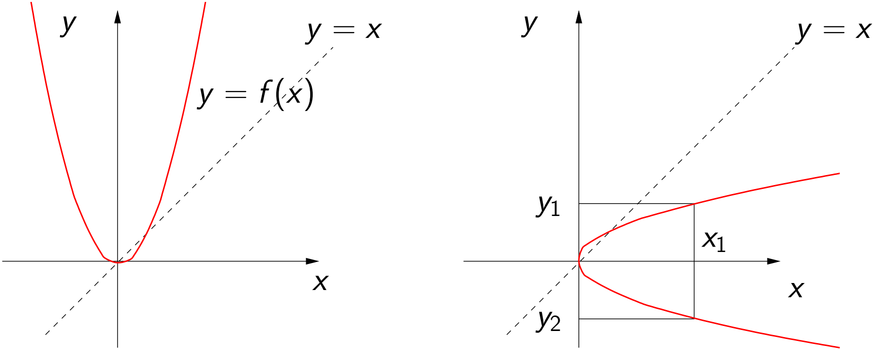
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im}(f)$, $f(x) = 3x + 2$
f è invertibile sul suo dominio;
$(\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, f è iniettiva$)$



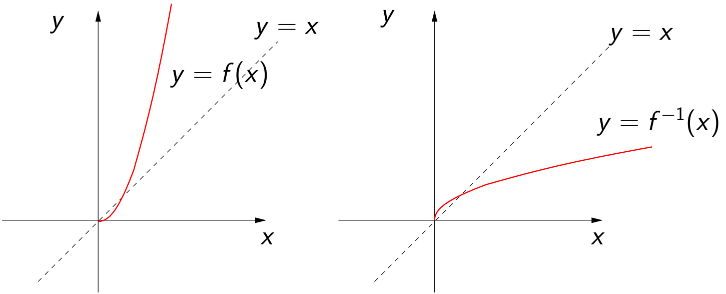


$$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im}(f)$, $f(x) = x^2$
f NON è invertibile sul suo dominio;
$(\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$, f NON è iniettiva)

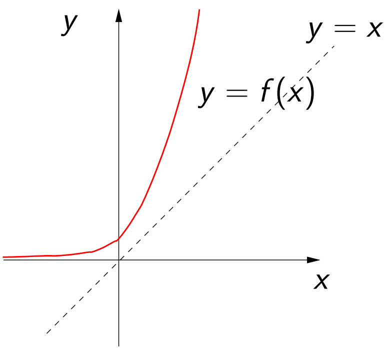


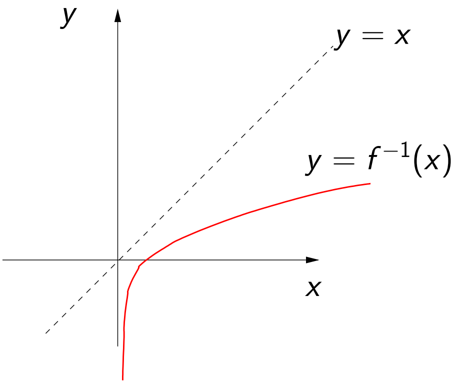
$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathrm{im}(f)$, $f(x) = x^2$
f è invertibile sull'insieme di definizione $[0, +\infty)$
$(\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$, f è iniettiva$)$



$$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f) = [0, +\infty),\ \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f) = [0, +\infty).$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{im}(f),\ f(x) = e^x$
f è invertibile sul suo dominio;
$(\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R},\ \mathrm{im}(f) = (0, +\infty),\ f$ è iniettiva$)$





$$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f) = (0, +\infty),\ \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Funzioni polinomiali

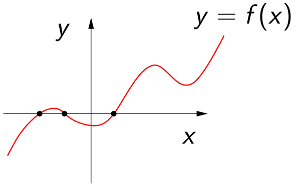
Una funzione si dice polinomiale se è del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ovvero è un polinomio nella variabile x. I coefficienti a_i, con $i = 0, \ldots, n$ sono reali. n è detto grado del polinomio.

Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}$, e $a_i \in \mathbb{R}$, l'espressione $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ è ancora un numero reale. Quindi $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Si definiscono radici o zeri di un polinomio i valori di $x \in \mathbb{R}$ tali per cui $f(x) = 0$, ovvero sono le intersezioni tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle ascisse:



Funzioni razionali

Una funzione si dice razionale (o fratta) se è il rapporto di due polinomi:

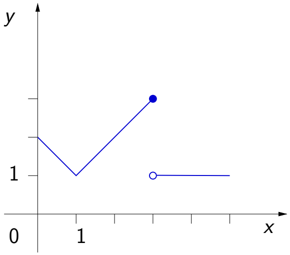
$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, con $i = 0, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$
Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}$, e $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, numeratore e denominatore sono numeri reali. Il rapporto tra due numeri reali è un numero reale se il denominatore è diverso da zero. Quindi
$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\text{insieme degli zeri del denominatore}\}$.

Funzioni definite a tratti

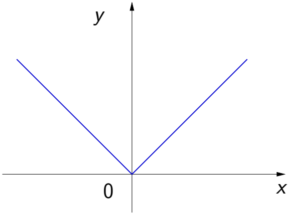
Sono funzioni reali di variabile reale ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) definite da espressioni diverse su intervalli diversi:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$



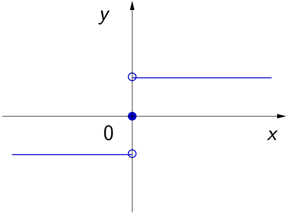
Funzione Valore Assoluto

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Funzione Segno

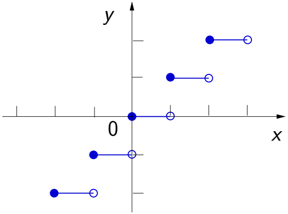
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}: \quad f(x)=sign(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



Funzione Parte Intera

E' la funzione che associa ad un numero reale x il più grande numero intero (in $\mathbb{Z}$) minore o uguale a x:
se $x = 3.4524$, $[x] = 3$, se $x = 2$, $[x] = 2$,
se $x = -12.786786$, $[x] = -13$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : \quad f(x) = [x]$$

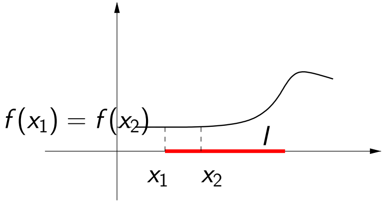


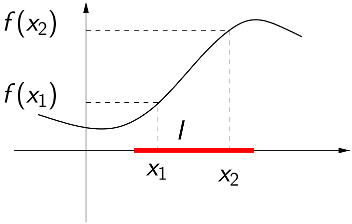
Funzioni monotone

Sia I il dominio di una funzione f reale a variabile reale, oppure un intervallo contenuto nel dominio di f.

Def. La funzione f si dice **monotona crescente su I** se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$





Def. La funzione f si dice **monotona strettamente crescente su I** se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Analogamente si definisce una funzione **monotona decrescente su** I se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

e **monotona strettamente decrescente su** I se

$$\forall x_1,\ x_2 \in I, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

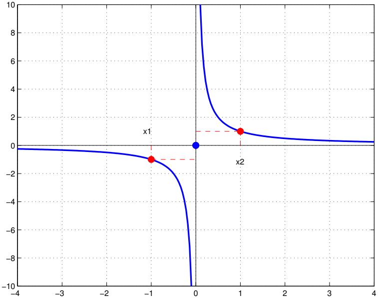
Proposizione. Se f è strettamente monotona sul suo dominio allora f è iniettiva.

Dim. Sia f strettamente monotona crescente, allora $\forall x_1,\ x_2 \in \mathrm{dom}(f)$ con $x_1 < x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero f è iniettiva.
Dimostrazione analoga si ha per f strettamente monotona decrescente. $\square$

Il viceversa non è vero. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è iniettiva senza essere strettamente monotona sul suo dominio.



$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
f è decrescente su $(-\infty, 0)$, è decrescente su $(0, +\infty)$, ma non è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

Infatti per $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, si ha $f(x_1) = -1 < f(x_2) = 1$.

Funzioni matematiche elementari

Funzioni polinomiali e razionali

retta: $y = f(x) = mx + q$, con $m,\ q \in \mathbb{R}$ assegnati.
parabola: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ assegnati.
cubica: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ assegnati.
razionale: $y = f(x) = 1/x$, $y = f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4}$,....

Funzioni trigonometriche

seno: $y = sin(x)$ coseno: $y = cos(x)$
tangente: $y = tg(x)$ cotangente: $y = cotg(x)$,...

Funzioni trascendenti

esponenziale: $y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}_+$
logaritmo: $y = log_a(x)$, con $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
caso particolare: $a = e = 2.718281828459...$ (**Numero di Nepero**)

Funzioni irrazionali

radice: $y = \sqrt{(x)}$, $y = \sqrt[3]{(x)}$...

Funzione elevamento a potenza

$$y = x^{\alpha} \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Distinguiamo vari casi:

- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow y = x^0 = 1$ funzione costante.

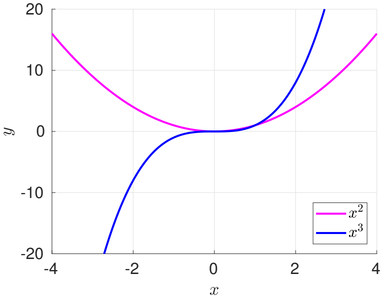
$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}. \qquad \mathrm{im}(f) = \{1\}.$

- $\alpha = n \in \mathbb{N}^+ \quad \Rightarrow y = x^n.$

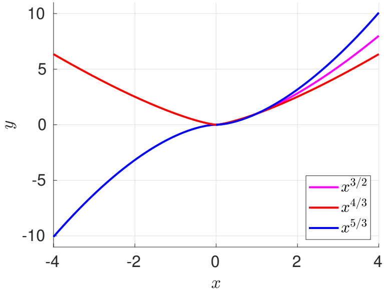
$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}.$

Se n è pari, $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$

Se n è dispari, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$



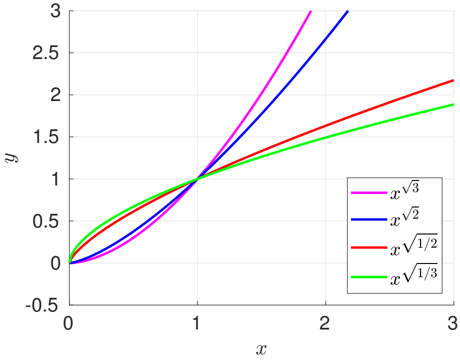
$\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, con $n, \ m \in \mathbb{N}^+$ primi fra loro,
$\Rightarrow y = x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}$.



n	m	Esempio	dom(f)	im(f)
dispari	pari	$y = x^{3/2}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
dispari	dispari	$y = x^{5/3}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
pari	dispari	$y = x^{4/3}$	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty)$

$\alpha > 0$ irrazionale ($\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$).

$\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$ e $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$



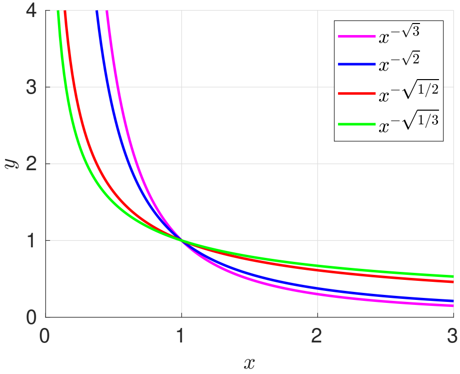
Se $x \geq 1$, definisco $y = x^\alpha := \sup\{x^{n/m} : \frac{n}{m} \leq \alpha\}$
Se $0 \leq x < 1$, definisco $y = x^\alpha := \inf\{x^{n/m} : \frac{n}{m} \leq \alpha\}$
Se $x < 0$, x^α non è definito.

$\alpha < 0$ irrazionale ($\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}^-$)

Poniamo $\beta = -\alpha$, se $\alpha < 0 \Rightarrow \beta > 0$ e $x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}} = \dfrac{1}{x^\beta}$

Il dominio di x^α coincide con il dominio di $x^{-\alpha}$ privato dello zero, ovvero è $\mathbb{R}^+$.

Le funzioni x^α con $\alpha < 0$ sono strettamente decrescenti su $\mathbb{R}^+$.



Funzioni esponenziali e logaritmiche

Sia $a \in \mathbb{R}^+$. Una funzione si dice esponenziale se la variabile indipendente x compare all'esponente di a (detto base):

$$f(x) = a^x$$

per ogni $a > 0,\ a \neq 1$, $f(x)$ assume valori reali $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ e $im(f) = (0, +\infty)$.
Inoltre $f(0) = a^0 = 1$.

Sia $a \neq 1$. Una funzione si dice logaritmica se la variabile indipendente x compare all'argomento del logaritmo di base a:

$$f(x) = \log_a(x) = \log_a x$$

Ricordiamo che

$$y = \log_a x \qquad \Leftrightarrow a^y = x$$

ovvero la funzione logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale, quindi $\text{dom}(f) = (0, +\infty)$.

Funzioni composte

Siano X, Y e Z tre insiemi in $\mathbb{R}$. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Definiamo una nuova funzione $h : X \to Z$ detta funzione composta di f e g tale che

$$h(x) = g(f(x))$$

Es. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2$.
La funzione composta è: $h(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^2$.
$f(x)$ prende il posto di x nella definizione di g.

Es. Sia $h(x) = \log(2x + 1)$.
Posso vedere $h(x) = g(f(x))$ con $g(x) = \log(x)$ e $f(x) = 2x + 1$.

Es. Sia $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x^2}}$.
Posso vedere $h(x) = g(f(x))$ con $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$.

Dominio di una funzione composta

Il dominio di una funzione f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è definita, ovvero l'insieme

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Prendiamo $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$,

$h(x) = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$.

$$x \in \mathrm{dom}(h) \Leftrightarrow (x \in \mathrm{dom}(f) \quad e \quad f(x) \in \mathrm{dom}(g))$$

Quindi $x \in \mathrm{dom}(h)$ sse $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$, ovvero $\mathrm{dom}(h) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

Quando $h(x) = g(f(x))$,

$$\mathrm{dom}(h) = \{x \in \mathrm{dom}(f) : \ f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}$$

Oss. La composizione di funzioni non è commutativa:

$$g(f(x)) \neq f(g(x)) \text{ in genere.}$$

$f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2$.
$g(f(x)) = (\sin(x))^2$ mentre $f(g(x)) = \sin(x^2)$.

Proprietà. Se f e g sono invertibili e $z = h(x) = g(f(x))$, allora è invertibile anche h e vale

$$h^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)).$$

Proprietà. Se f e g sono entrambe monotone crescenti (o entrambe decrescenti) allora $g(f(x))$ sarà monotona crescente.
$g(f(x))$ sarà monotona decrescente negli altri casi.

Dominio di $f(x) = (h(x))^{g(x)}$

Consideriamo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
A priori l'esponente $g(x)$ può assumere un valore reale positivo nullo o negativo.
Quindi la funzione $f(x)$ è ben definita se la base $h(x)$ è definita e t.c. $h(x) > 0$ e se $g(x)$ è definita, ovvero

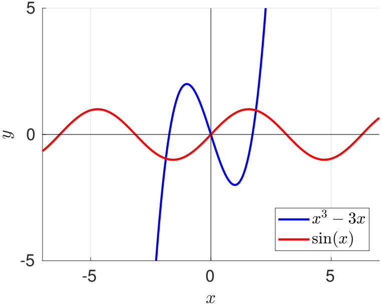
$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathrm{dom}(h) : \ h(x) > 0\} \cap \mathrm{dom}(g)$$

Es. Determinare il dominio di $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(f) \quad &= \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1 + \frac{1}{x} > 0\right\} \cap \mathbb{R} = \\ &= (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)\end{aligned}$$

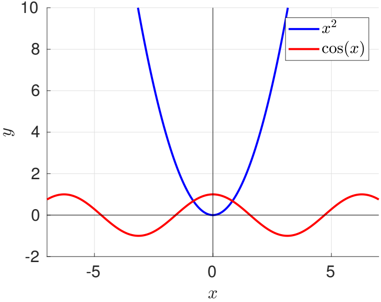
Simmetrie di funzione

Def. Una funzione si dice dispari se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \text{dom}(f)$ (equivalentemente $-f(x) = f(-x)$).
Es. $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = x^3$ sono dispari.



Verifica: scrivo $f(-x)$:
$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -(x^3 + 3x) = -f(x)$.
scrivo $g(-x)$: $\quad g(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -g(x)$.

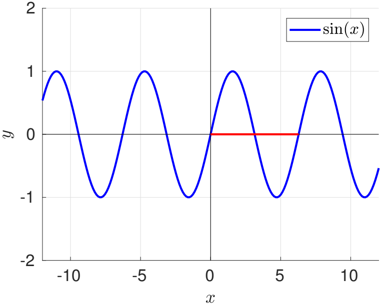
Def. Una funzione si dice pari se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \text{dom}(f)$ (è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate $x = 0$).
Es. $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$ sono funzioni pari.



Verifica: scrivo $f(-x)$: $\quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
scrivo $g(-x)$: $\quad g(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = g(x)$.

Funzioni periodiche

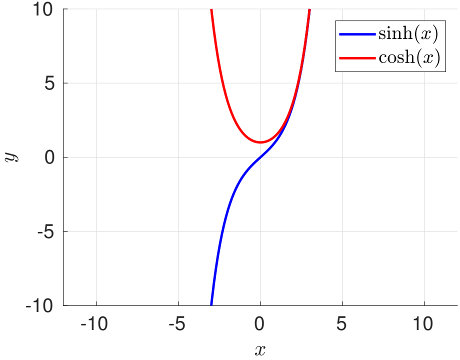
Def. Una funzione si dice periodica di periodo T se $\forall x \in \text{dom}(f)$ si ha $f(x+T) = f(x)$.
Es. $f(x) = \sin(x)$ con $T = 2\pi$.



Verifica: $f(x+T)$:
$f(x+T) = f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = sin(x) = f(x)$.

Funzioni iperboliche

$$\sinh(x) =: \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) =: \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



La relazione fondamentale tra sinh e cosh è:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\sinh(t)$ e $\cosh(t)$ sono dette funzioni iperboliche perché un punto $P = (x_P, y_P)$ del piano cartesiano con $x_P = \cosh(t)$ e $y_P = \sinh(t)$, al variare di t appartiene all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

Riferimento bibliografico

Canuto-Tabacco, cap. 2.

Esercizi:

1) Individuare dominio e insieme immagine delle funzioni elementari viste ad esercitazione e dire se sono monotone (crescenti o decrescenti) sul loro dominio, se sono iniettive, suriettive, biettive, invertibili.

2) Esercizi del cap. 2 del libro Canuto-Tabacco.