Funzioni infinitesime e loro confronto

Ricordiamo che f si dice infinitesima per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Siano f e g due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Dopo aver risolto la forma indeterminata $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, possiamo trovare:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{(caso 1)} \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{(caso 2)} \\ \infty & \text{(caso 3)} \end{cases}$$

Nel caso 1 diciamo che f è un infinitesimo di ordine superiore a g (lo 0 di f pesa di più di quello di g).

Nel caso 2 diciamo che f e g sono infinitesimi dello stesso ordine (lo 0 di f e quello di g pesano allo stesso modo).

Nel caso 3 diciamo che f è infinitesimo di ordine inferiore a g (lo 0 di f pesa meno di quello di g).

Funzioni infinitesime e 'o piccolo'

Definizione. Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime quando $x \to x_0$.
Diciamo che $f(x)$ è un "o piccolo" di $g(x)$ quando $x \to x_0$ e scriviamo

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0},$$

se succede che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Esempio. $sin(x^2) = o(x)$ quando $x \to 0$ perché
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x^2)}{x} = 0.$

Le espressioni "$f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$" e "f è un infinitesimo di ordine superiore a g quando $x \to x_0$" sono equivalenti e significano che $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$ quando $x \to x_0$.

Il simbolo “o piccolo”

$f(x) = o(1)$ per $x \to 0$ vuol dire $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$, cioè $f(x)$ è infinitesima per $x \to 0$.

Esempi.

$$\begin{array}{llll} \sin(x) = o(1) & \text{per } x \to 0, & \sin(x) \sim x & \text{per } x \to 0, \\ 1 - \cos(x) = o(1) & \text{per } x \to 0, & 1 - \cos(x) \sim x^2/2 & \text{per } x \to 0, \\ e^x - 1 = o(1) & \text{per } x \to 0, & e^x - 1 \sim x & \text{per } x \to 0. \end{array}$$

Calcolo di forme indeterminate del tipo 0/0

Quando si deve calcolare il limite di rapporto di funzioni infinitesime per $x \to 0$, si raccoglie la potenza di x al minimo esponente.

Es. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x}{x^4 - 3x} =$

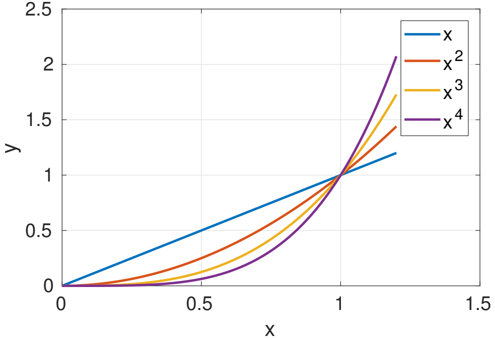
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(6 - 2x + x^2)}{x(-3 + x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(6 - 2x + x^2)}{(-3 + x^3)} = -2$$

Il monomio di grado minimo è quello principale, ovvero quello più grande, quello predominante.

Confronto di infinitesimi x^n per $x \to 0$

Fissato $x \in (0,1)$, minore è l'esponente n e maggiore è il valore x^n.

x	$>$	x^2	$>$	x^3	$>$	x^4
10^{-1}	$>$	10^{-2}	$>$	10^{-3}	$>$	10^{-4}
10^{-2}	$>$	10^{-4}	$>$	10^{-6}	$>$	10^{-8}
10^{-3}	$>$	10^{-6}	$>$	10^{-9}	$>$	10^{-12}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			



Il simbolo "o piccolo"

Data $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 7x^5 + 2x$ mettiamo in evidenza il termine principale (quello di grado minimo):

$$f(x) = 2x + 2x^2 - 4x^3 + 7x^5$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 4x^3 + 7x^5}{x} = \lim_{x\to 0}(2x - 4x^2 + 7x^4) = 0,$$

allora

$$2x^2 - 4x^3 + 7x^5 = o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

cioè $2x^2 - 4x^3 + 7x^5$ va a zero più velocemente di x quando $x \to 0$ e scriviamo

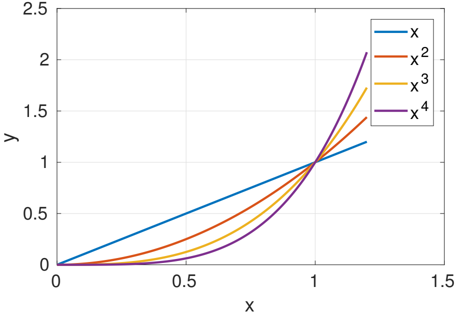
$$\boxed{f(x) = 2x + 2x^2 - 4x^3 + 7x^5 = 2x + o(x)}$$

Confronto di monomi

Se $p > q \geq 0$, allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^p}{x^q} = \lim_{x\to 0} x^{p-q} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^p = o(x^q), \text{ per } x \to 0.$$

Se $p > q \geq 0$, x^p tende a zero più velocem. di x^q, per $x \to 0$



Quando $x \to 0$

$x^4 = o(x^3)$

$x^3 = o(x^2)$

$x^2 = o(x)$

$x^3 = o(x)$

.....

Algebra degli infinitesimi

Oss. È come lavorare con le potenze.

Es. $(3x^2 + o(x^2)) + (2x^2 + o(x^2)) = 5x^2 + o(x^2)$

$(3x^2 + o(x^3)) + (2x^2 + o(x^2)) = 5x^2 + o(x^2)$

$(3x^2 + o(x^3)) + (2x + o(x^2)) = 2x + 3x^2 + o(x^2) = 2x + o(x)$

$(3x^3 + o(x^3)) + (2x + o(x^2)) = 2x + 3x^3 + o(x^2) = 2x + o(x^2)$

$\dfrac{5x^3 + o(x^3)}{x^2} = 5x + o(x)$

Siano $p,\ q \geq 0$

$$
\begin{array}{ll}
o(x^p) \pm o(x^p) = o(x^p) & \text{per } x \to 0 \\
o(x^p) \pm o(x^q) = o(x^n), \quad n = \min(p, q) & \text{per } x \to 0 \\
x^q o(x^p) = o(x^{p+q}) & \text{per } x \to 0 \\
o(x^p)/x^p = o(1) & \text{per } x \to 0 \\
o(x^p)/x^q = o(x^{p-q}) \quad p \geq q & \text{per } x \to 0
\end{array}
$$

Riprendiamo il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 6x}{x^4 - 3x}$ e riscriviamo i polinomi a numeratore e denominatore evidenziando:

il termine principale (=quello di grado minore)
e raggruppando gli altri monomi nel termine "o piccolo":

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 6x &= 6x + o(x) \\ x^3 - 3x^2 &= -3x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x}{x^3 - 3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x + o(x)}{-3x^2 + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{-3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{-x} = -\infty$$