



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BRESCIA

ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2024/25

Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni
Ingegneria Fisica e Matematica
Ingegneria Informatica
(cognomi M-Z)

Docenti:

Paola Gervasio

e-mail: paola.gervasio@unibs.it

web: <https://paola-gervasio.unibs.it>

Paolo Scarpat

e-mail: paolo.scarpat@unibs.it

DURATA DELLE LEZIONI: fino al 20 dicembre 2024

4 ore di **lezione** alla settimana:

LUN. 9:00-11:00

VEN. 11:00-13:00

4 ore di **esercitazione** alla settimana:

MER. 15:00-17:00

GIO. 11:00-13:00

ATTENZIONE alle comunicazioni sulla pagina web del corso:
paola-gervasio.unibs.it/Analisi1 per eventuali variazioni
d'orario

TESTI DI RIFERIMENTO

(uno o l'altro, sono equivalenti)

C. Canuto, A. Tabacco:
Analisi Matematica 1,
Pearson, 2021



C. Canuto, A. Tabacco:
Analisi Matematica 1,
Springer, 2014 (4a ed.)



PREREQUISITI

- operazioni elementari senza uso della calcolatrice
- calcolo letterale (prodotti notevoli)
- geometria analitica nel piano: retta, parabola, crf, iperbole, ellisse
- logaritmi e potenze: definizioni e proprietà
- elementi di goniometria e trigonometria
- equazioni di 1° e 2° grado, irrazionali, fratte, logaritmiche, esponenziali, goniometriche
- disequazioni (e sistemi di disequazioni): intere, razionali, irrazionali, fratte, logaritmiche, esponenziali, goniometriche

L'**ANALISI MATEMATICA** è una branca della matematica che si basa sul calcolo infinitesimale.

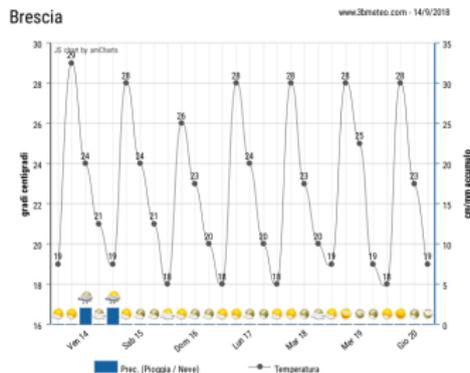
Il **Calcolo infinitesimale** è lo studio del **comportamento locale** di FUNZIONI mediante il concetto di LIMITE.

Due ingredienti fondamentali:

1. FUNZIONI
2. LIMITI

Nell'**ANALISI MATEMATICA I** si lavora con funzioni che dipendono da una sola variabile ($y = f(x)$) ed è il punto di partenza per studi più complessi su funzioni a più variabili.

Un esempio di funzione ad una variabile: la temperatura dell'aria a Brescia al variare del tempo:



$t = \text{tempo}$ è una variabile **INDIPENDENTE** (il tempo varia in maniera autonoma, indipendente)

$T = \text{temperatura}$ è una variabile **DIPENDENTE** dal tempo:
 $T = f(t)$. Si dice che è una **FUNZIONE** del tempo.

Funzioni a più variabili

Più in generale la temperatura dipende dalla posizione nello spazio (longitudine (x), latitudine (y), altitudine (z)) oltre che dal tempo (t), quindi è una funzione di 4 variabili indipendenti

$$T = f(x, y, z, t)$$

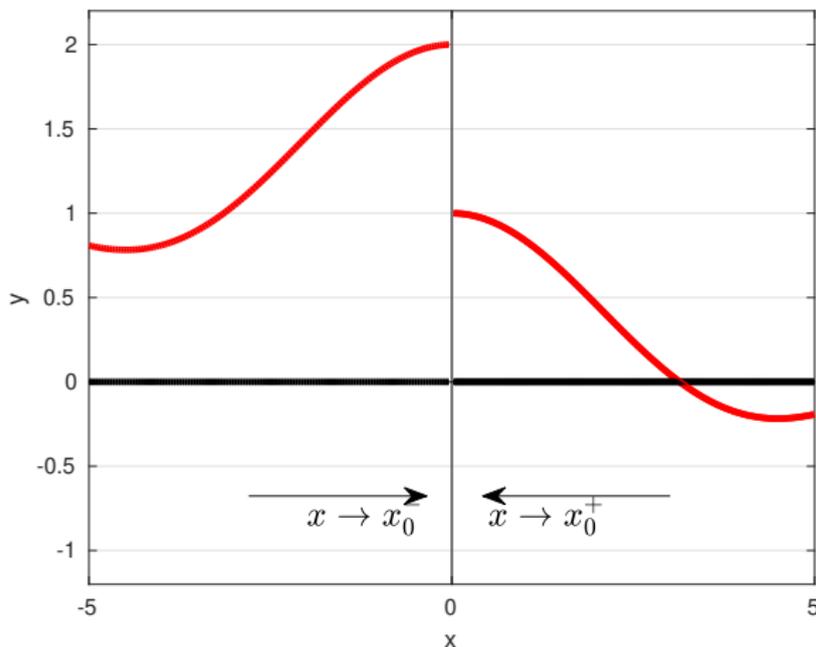
Altro esempio è la concentrazione c di un inquinante nell'aria: anch'essa dipende da 4 variabili: $c = f(x, y, z, t)$



In Analisi 1 ci limitiamo a studiare funzioni che dipendono da una sola variabile indipendente.

Concetto intuitivo di limite

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ in figura



Vogliamo capire come cambia la **variabile dipendente** y quando la **variabile indipendente** x si avvicina a zero.

Stiamo facendo uno studio locale attorno al valore 0.

Da dove partire:

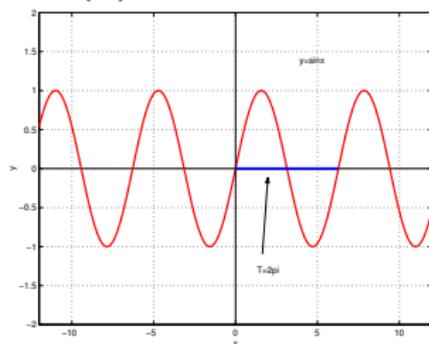
1. Nozioni di base: **Logica**, **formalismo** del linguaggio matematico

$$\forall I_\varepsilon(\ell) \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

2. Insiemi numerici: **Numeri Reali**

$$\mathbb{R} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \sqrt{2}, \pi, e, \frac{3}{5}, \dots\}$$

3. Funzioni: $f(x) = \sin(x)$



4. Limiti.....

Perché devo studiare Analisi 1 in un corso di laurea
in Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni o in
Ing. Informatica?

Uno tra infiniti esempi



Foto di Jsig9 da Pixabay

Uno tra infiniti esempi

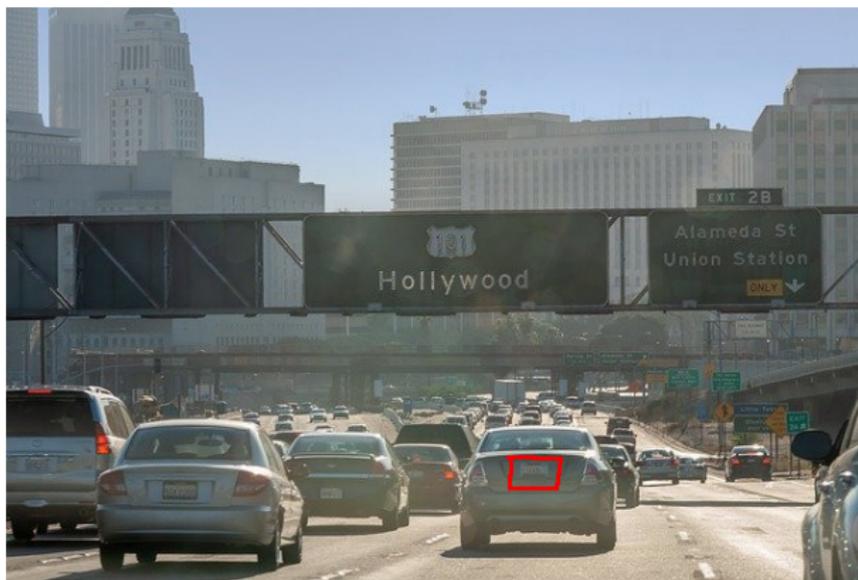
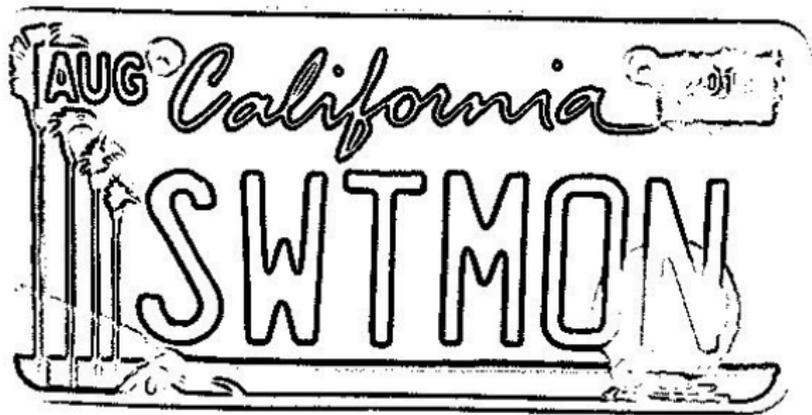


Foto di Jsig9 da Pixabay





È un problema di riconoscimento di contorni

Cambiamo immagine per capire meglio



(es_edge)

AI – ML – NN

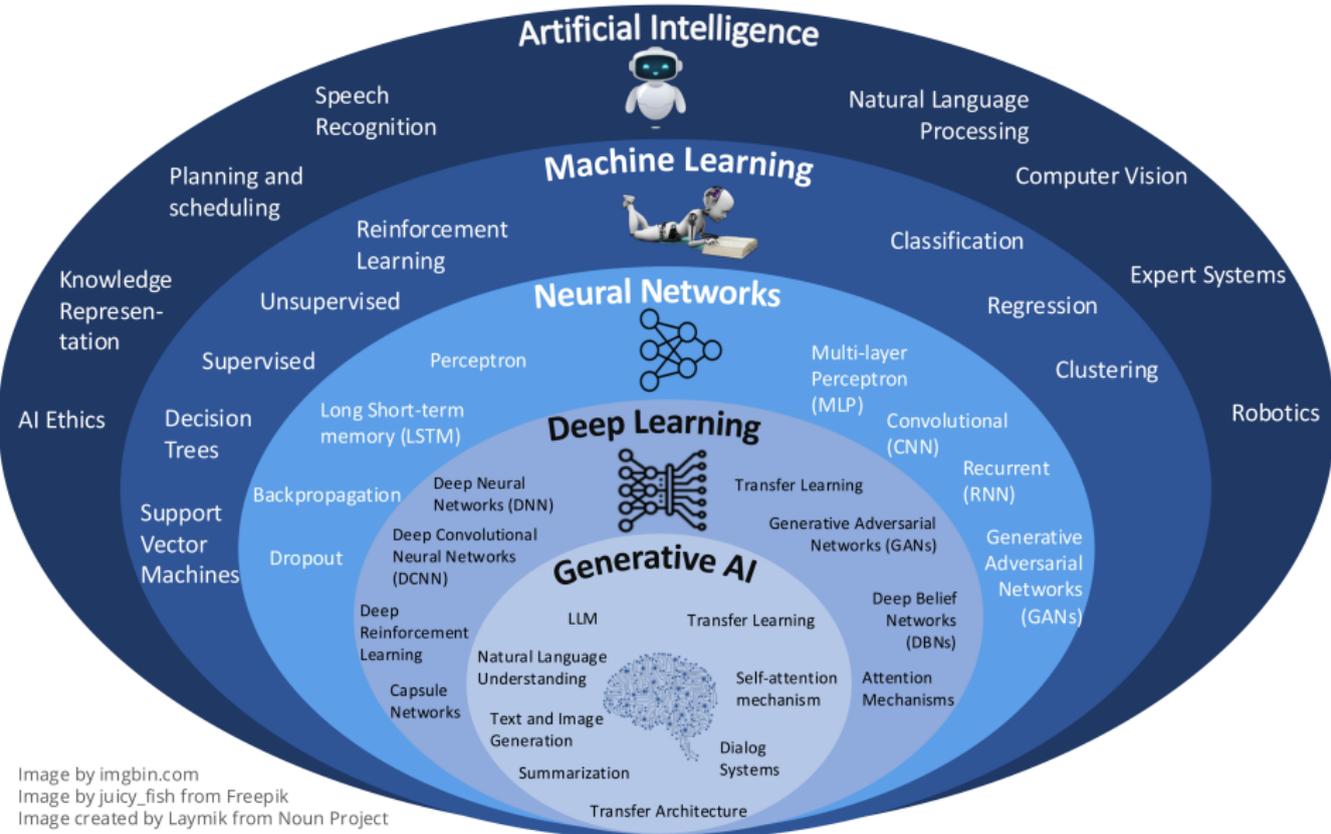
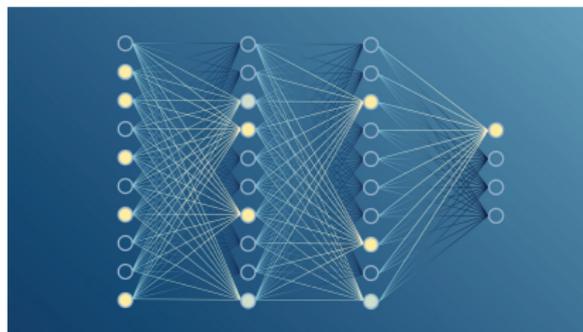


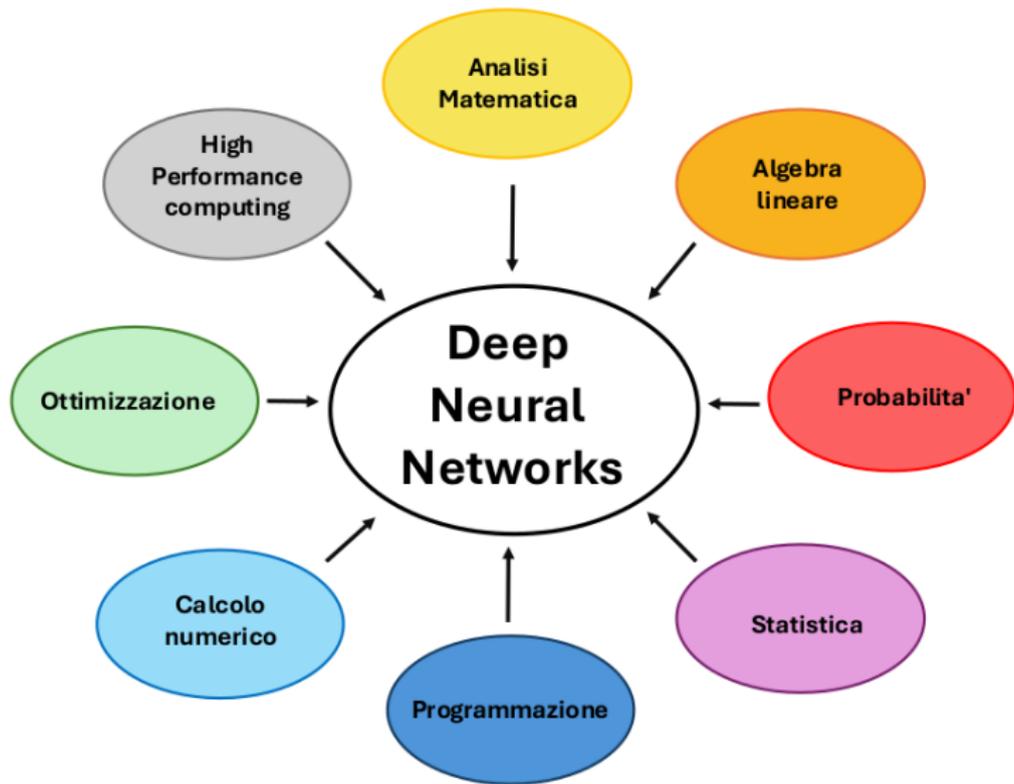
Image by imgbin.com
Image by juicy_fish from Freepik
Image created by Laymik from Noun Project

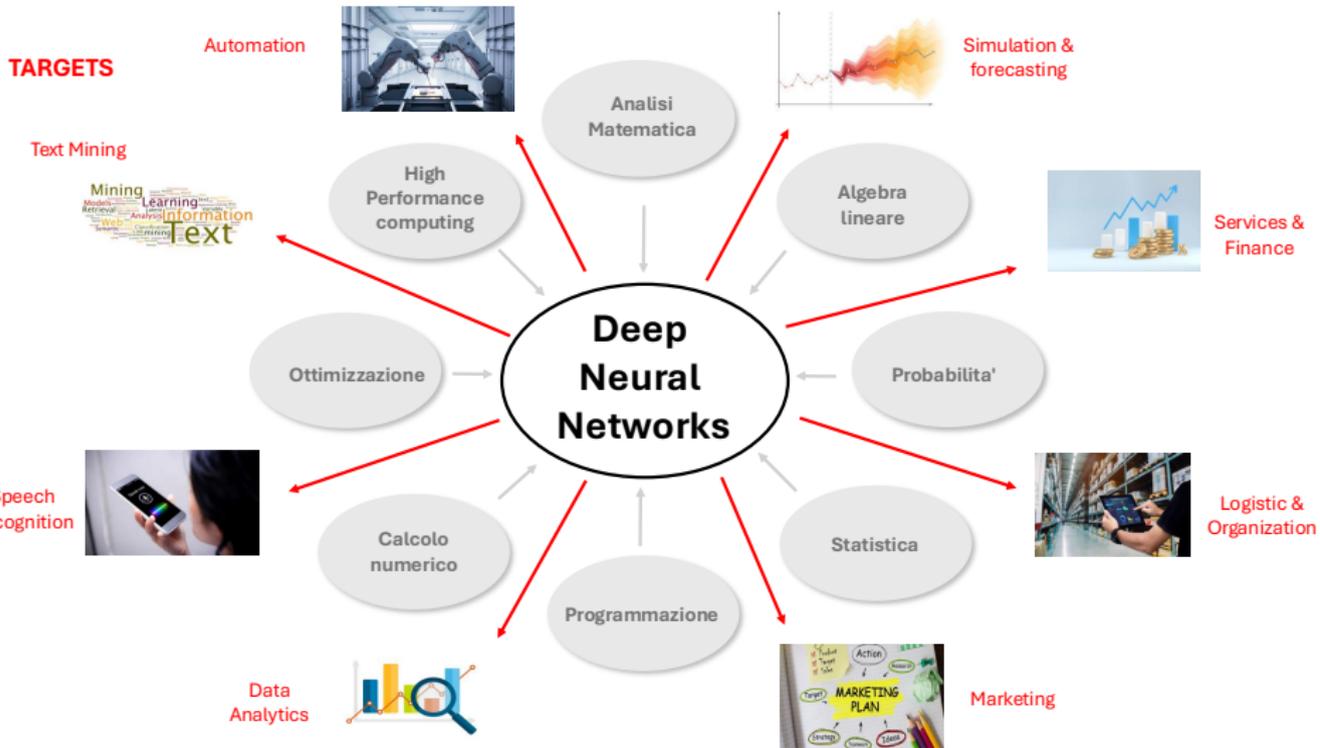
Deep Neural Networks

*A deep model is nothing more than a complex tensorial computation that can ultimately be decomposed into standard mathematical operations from **linear algebra** and **analysis**.*

(François Fleuret - Université de Genève)







Argomenti del corso

1. Elementi di base, funzioni elementari
2. Numeri complessi
3. Limiti di funzioni e di successioni
4. Calcolo differenziale (derivate e studio di funzione)
5. Polinomi di Taylor
6. Serie
7. Integrali

Modalità d'esame (**con** prove intermedie)

1. seconda metà di ottobre – **prima prova intermedia**
esercizi: disequazioni, funzioni elementari, complessi
2. fine novembre o inizio dicembre – **seconda prova intermedia**
esercizi: limiti, studio di funzione
3. gennaio – **terza e ultima prova**
esercizi: serie e integrali; **teoria**: tutto il programma

Regole:

- per fare la prova 2, bisogna aver superato la prova 1,
- per fare la prova 3, bisogna aver superato la prova 2,
- per superare l'esame:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{voto_esercizi} \geq 18 \\ \text{voto_teoria} \geq 18 \\ \text{voto_finale} = \frac{\text{voto_esercizi} + \text{voto_teoria}}{2} \end{array} \right.$$

Modalità d'esame (**senza** prove intermedie)

Ci sono **6 appelli in un anno accademico**.

Prima sessione d'esame: da 07.01.2025 a 14.02.2025 (2 appelli)

Altre sessioni d'esame: pasquale (1 appello), giugno–luglio (2 appelli), agosto–settembre (1 appello).

Struttura dell'appello

1. nella data dell'appello: (esercizi su disequazioni, funzioni elementari, complessi) + (esercizi su: limiti, studio di funzione),
2. una settimana dopo: (esercizi su serie e integrali) + (teoria su tutto il programma).

Regole:

- la prima parte è superata se si raggiunge la sufficienza in ognuno dei 2 gruppi di esercizi,
- per fare la seconda parte bisogna aver superato la prima parte,
- per superare l'esame:

$$\begin{cases} \text{voto_esercizi} \geq 18 \\ \text{voto_teoria} \geq 18 \\ \text{voto_finale} = \frac{\text{voto_esercizi} + \text{voto_teoria}}{2} \end{cases}$$

ELEMENTI DI INSIEMISTICA

- Definizione di insieme e simboli
- Operazioni fra insiemi
- Caratterizzazione di un insieme
- Prodotto cartesiano fra insiemi

Si veda il corso di [ALGEBRA E GEOMETRIA](#)

ELEMENTI DI LOGICA

Def. Una **Proposizione logica** è una frase di cui si può dire, senza equivoco, se è VERA o FALSA, cioè porta con sé un *valore di verità*.

Esempi:

'Mercurio è un pianeta', 'Milano è in Egitto' sono proposizioni logiche

'Milano è lontana da Roma', 'Il giallo è un bel colore' NON sono proposizioni logiche.

Le proposizioni logiche verranno indicate con delle lettere:

\mathcal{P} = 'Mercurio è un pianeta'

I PREDICATI

Def. Un **PREDICATO LOGICO** è un enunciato $\mathcal{P}(x, \dots)$ dipendente da una o più variabili x, \dots , scelte in un insieme opportuno.

Es. Sia x un numero intero positivo. $\mathcal{P}(x) = 'x \text{ è un numero primo}'$ è un predicato.

Un predicato diventa una proposizione (V o F) nel momento in cui le variabili vengono fissate, oppure quando vengono utilizzati i quantificatori.

Es. $\mathcal{P}(7)$ è una proposizione Vera,
 $\mathcal{P}(10)$ è una proposizione Falsa.

QUANTIFICATORI

OSSERVAZIONE. Dato un predicato $\mathcal{P}(x)$ con x appartenente ad un certo insieme X , può interessare sapere se $\mathcal{P}(x)$ è vera per tutti gli elementi x di quell'insieme, oppure se esiste almeno un elemento x di X per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera.

Si introducono i **quantificatori**.

quantificatore universale:

$\forall x, \mathcal{P}(x)$ si legge per ogni x vale $\mathcal{P}(x)$

quantificatore esistenziale:

$\exists x, \mathcal{P}(x)$ si legge
esiste almeno un x per cui vale $\mathcal{P}(x)$

$\exists! x, \mathcal{P}(x)$ si legge
esiste un unico x per cui vale $\mathcal{P}(x)$

$\left. \begin{array}{l} \forall x, \mathcal{P}(x) \\ \exists x, \mathcal{P}(x) \\ \exists! x, \mathcal{P}(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sono proposizioni logiche e} \\ \text{possono assumere valore vero o falso.} \end{array}$

Es. Sia $x \in \mathbb{N}$, definisco $\mathcal{P}(x)$ =' x è un numero primo'.

$\forall x, \mathcal{P}(x)$ ='ogni numero naturale è primo' è **FALSA**

$\exists x, \mathcal{P}(x)$ ='esiste almeno un numero naturale primo' è **VERA**

$\exists! x, \mathcal{P}(x)$ ='esiste un unico numero naturale primo' è **FALSA**

CONNETTIVI LOGICI

A partire da proposizioni logiche, se ne possono costruire altre mediante i *connettivi logici*.

I *connettivi logici* sono operazioni che agiscono su proposizioni.

negazione: $\neg P$ (si legge **non** P): è la negazione di P .

Se P è Vera, allora $\neg P$ è Falsa e viceversa.

Es. P ='Mercurio è un pianeta', $\neg P$ ='Mercurio non è un pianeta'.

coniunzione: $P \wedge Q$ (si legge **P e Q**): è una proposizione Vera solo se entrambe P e Q sono Vere, Falsa in tutti gli altri casi.

disgiunzione: $P \vee Q$ (si legge **P o Q**): è una proposizione Falsa solo se entrambe P e Q sono False, Vera in tutti gli altri casi.

Es. P ='5 è un numero dispari', Q ='4 è un numero primo'. $P \wedge Q$ è FALSA, $P \vee Q$ è VERA.

Es. P ='5 è un numero dispari', Q ='4 è un numero pari'. $P \wedge Q$ è VERA, $P \vee Q$ è VERA.

Negazione di quantificatori e predicati

OSSERVAZIONE. I connettivi logici possono essere applicati anche ai predicati con quantificatori

$\neg(\forall x, \mathcal{P}(x))$ è equivalente a $\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$
 $\neg(\exists x, \mathcal{P}(x))$ è equivalente a $\forall x, \neg\mathcal{P}(x)$

Es. X è l'insieme delle città italiane e x una città italiana
 $\mathcal{P}(x)$ = 'x è una città di mare'

$\forall x, \mathcal{P}(x)$ si legge 'qualunque città italiana è una città di mare.' (Falsa)

La sua negazione è:

$\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$ si legge 'esiste almeno una città italiana che non è una città di mare.' (Vera)

UN ALTRO CONNETTIVO LOGICO

L'implicazione: $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (si legge \mathcal{P} **implica** \mathcal{Q}).

Es.

Sono iscritto all'università, **allora** ho superato l'esame di maturità

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

Condizione necessaria, condizione sufficiente

Nella scrittura \mathcal{P} **implica** \mathcal{Q} , si dice che \mathcal{P} è **condizione sufficiente** per \mathcal{Q} e \mathcal{Q} è **condizione necessaria** per \mathcal{P} .

Es. Sono iscritto all'università, allora ho superato l'esame di maturità.

Il fatto che io sia iscritto all'università è **condizione sufficiente** a garantire che io abbia superato l'esame di maturità.

Il fatto che io abbia superato l'esame di maturità è **condizione necessaria** (cioè è una conseguenza) al fatto che io sia iscritto all'università.

Attenzione che se è vero che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, **NON È DETTO** che sia automaticamente vero che $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Riprendiamo l'esempio di prima:

il fatto che io abbia superato l'esame di maturità non implica che io sia iscritto all'università.

In alcuni casi può succedere che si abbiano contemporaneamente $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$,

allora si usa la **doppia implicazione** o **equivalenza logica** o **condizione necessaria e sufficiente**: $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ (si legge \mathcal{P} **se e solo se** \mathcal{Q}): è una proposizione Vera se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe Vere o entrambe False, altrimenti è Falsa.

Es. Ho superato l'esame di maturità, allora ho preso un voto maggiore o uguale a 60.

Vale anche il viceversa:

Ho preso un voto maggiore o uguale a 60 (alla maturità), allora ho superato l'esame di maturità.

Si formalizza con $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

Diciamo anche che: " \mathcal{P} è condizione necessaria e sufficiente a \mathcal{Q} "

Un **teorema** è costituito da un enunciato e da una dimostrazione. L'enunciato ha una **IPOTESI** (\mathcal{P} , il punto di partenza) ed una **TESI** (\mathcal{Q} l'obiettivo da dimostrare) e si sintetizza con

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Per dimostrare un teorema si possono usare **REGOLE DI DIMOSTRAZIONE** diverse, ma tra loro equivalenti.

1. $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
2. $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$
3. $\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$
4. $\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R} \wedge \neg \mathcal{R}$, dove \mathcal{R} è un'altra proposizione.

Le regole 2., 3. e 4. sono dette *regole di dimostrazione per assurdo*.

GLI INSIEMI NUMERICI

Numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



operazioni interne (il risultato sta in \mathbb{N}): somma e prodotto

proprietà: commutativa $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ e $n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$

associativa $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$ e

$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$

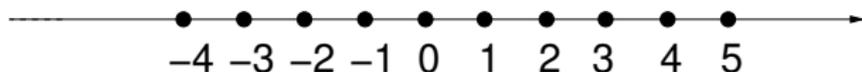
distributiva $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{n \in \mathbb{N} : n > 0\}$

Numeri interi: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

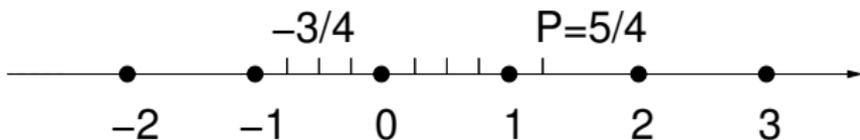
operazioni interne: somma, prodotto e sottrazione

$\mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}$



Numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{r = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+\}$

operazioni interne: somma, prodotto, sottrazione e divisione per un numero non nullo.



Un numero razionale ha una *rappresentazione decimale limitata*, le cifre dopo la virgola sono nulle da un certo punto in poi oppure, da un certo punto in poi, si ripetono periodicamente infinite volte.

Es. $r = -351.4500 = -351.45$, $s = 12.234343434 = 12.2\overline{34}$.

In \mathbb{Q} tutte le operazioni aritmetiche elementari sono interne, ma esistono dei numeri che non sono razionali, es. $\sqrt{2}$, π ,

I numeri reali

Numeri reali: $\mathbb{R} = \{ \text{tutti i numeri decimali razionali e irrazionali (ovvero con infinite cifre dopo la virgola non periodici)} \}$

Esempi di numeri irrazionali:

$$\pi = 3.1415\dots, \quad e = 2.71828\dots, \quad \sqrt{2} = 1.4142\dots$$

operazioni interne: somma, prodotto, sottrazione e divisione per un numero non nullo.

Oss. L'insieme dei numeri reali è identificato con una **retta**: ogni punto della retta è associato ad uno ed un solo numero reale.



Si hanno le inclusioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

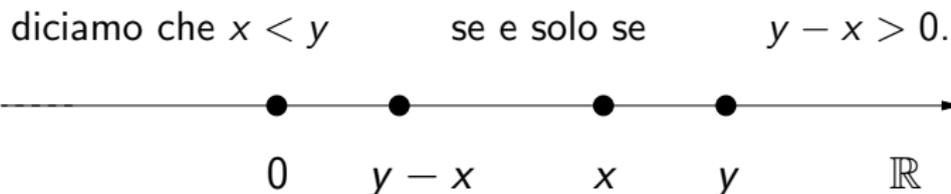
Proprietà di \mathbb{R}

1. Le operazioni aritmetiche definite su \mathbb{Q} si estendono a \mathbb{R} con analoghe proprietà.
2. Su \mathbb{R} c'è un **ordinamento totale**
3. \mathbb{Q} è **denso** in \mathbb{R} .
4. \mathbb{R} è **completo**.

2. ORDINAMENTO DEI NUMERI REALI

I numeri reali diversi da zero si dividono in positivi ($x > 0$ o $x \in \mathbb{R}_+$) e negativi ($x < 0$ o $x \in \mathbb{R}_-$).

Si introduce un **ordinamento** tra numeri reali come segue:
siano $x, y \in \mathbb{R}$,



L'ordinamento è **totale**, ovvero presi due qualsiasi numeri reali distinti è sempre vera una delle due condizioni:

$$x < y \quad \text{o} \quad y < x.$$

Si pone:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \text{ oppure } x = y.$$

La relazione d'ordine ' \leq ' interagisce con le operazioni algebriche di somma e prodotto:

$$\text{se } x \leq y \text{ e } \forall z \in \mathbb{R}, \text{ allora } x + z \leq y + z$$

noto come **Primo principio di equivalenza delle disequazioni**

e

$$\text{se } x \leq y \text{ e se } \begin{cases} z \geq 0 & \text{allora } x \cdot z \leq y \cdot z \\ z < 0 & \text{allora } x \cdot z \geq y \cdot z \end{cases}$$

noto come **Secondo principio di equivalenza delle disequazioni**

3. \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R}

ovvero: Tra due numeri reali qualsiasi esistono infiniti numeri razionali

Es. Consideriamo i numeri reali

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832785\dots$$

$$x = 3.1415926535897932384726433832785\dots$$

I numeri

$$3.141592653589793238463$$

$$3.141592653589793238464$$

\vdots

$$3.141592653589793238471$$

sono tutti razionali (hanno rappresentazione decimale finita), ma anche

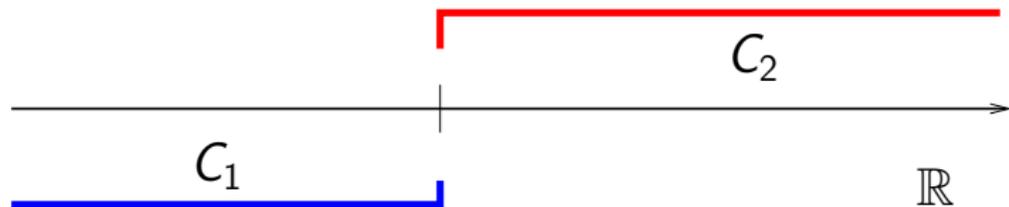
$$3.1415926535897932384631, \quad 3.1415926535897932384632, \dots$$

$$3.1415926535897932384639, \dots, 3.1415926535897932384709$$

sono tutti razionali, ecc.

4. La completezza di \mathbb{R}

Definizione. Due sottoinsiemi $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}$ disgiunti ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$), tali che $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}$ e tali che ogni elemento di C_1 sia minore di ogni elemento di C_2 sono detti/dette **classi contigue**.



(Geometricamente, due classi contigue in \mathbb{R} sono due semirette con la stessa origine)

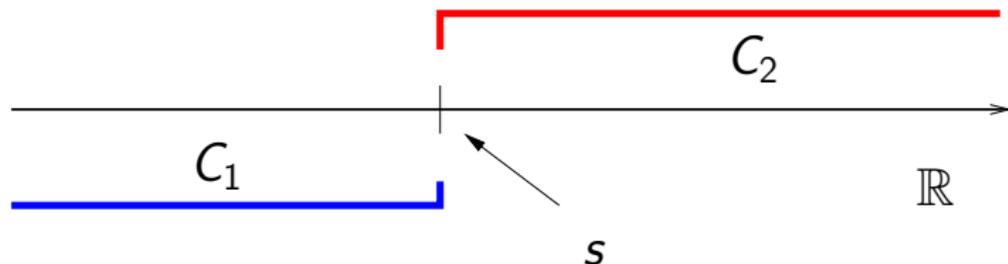
4. La completezza di \mathbb{R}

L'insieme dei numeri reali \mathbb{R} è **completo** ovvero verifica la seguente proprietà detta **Assioma di completezza** o **Assioma di Dedekind**.

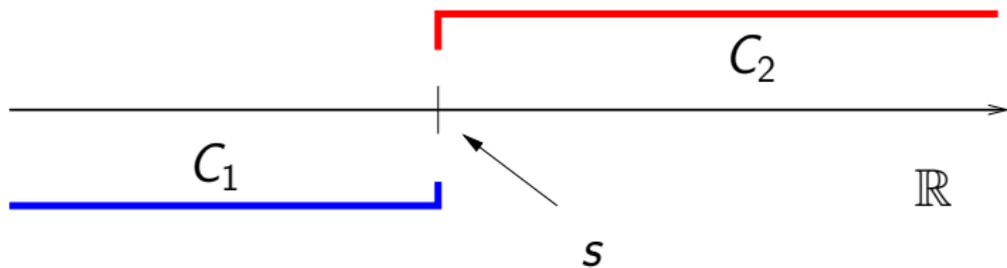
Assioma di Dedekind. Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}$ due **classi contigue**, allora $\exists! s \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \leq s \leq x_2$$

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2.$$



Def. s viene detto **elemento separatore** delle classi.



Geometricamente, la completezza significa che ovunque io tagli in due la retta reale \mathbb{R} , il punto di confine s tra le due semirette rappresenta un (!) numero reale. La retta \mathbb{R} è un **continuo** di punti. Al contrario \mathbb{Q} non è rappresentabile con una retta, perché è un sottoinsieme infinito, ma con lacune.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$\text{reali} = \text{razionali} \cup \text{irrazionali}$$

Sia \mathbb{Q} che $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sono densi in \mathbb{R} .

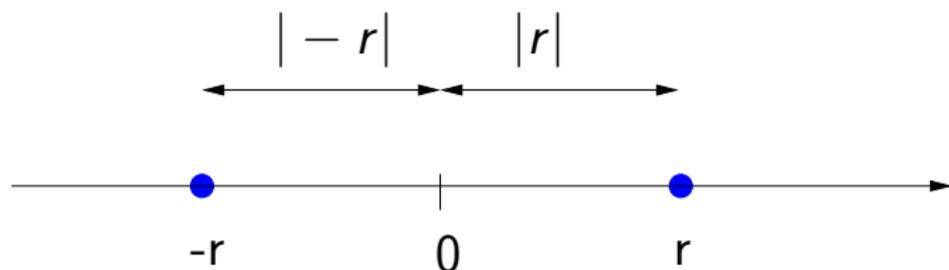
Modulo o "valore assoluto"

Dato $x \in \mathbb{R}$ definiamo **modulo** o **valore assoluto** di x il numero reale positivo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Es. $|5|$ è 5. $|-2.34|$ è 2.34

Dal punto di vista geometrico $|x|$ rappresenta la distanza di x da 0.

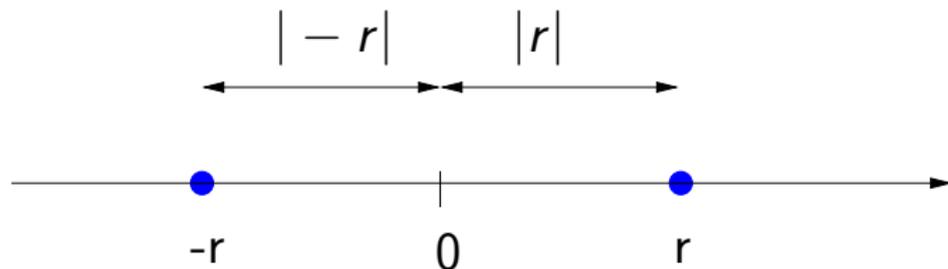


Analogamente, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale $|x - y| = |y - x|$ e $|x - y|$ rappresenta la distanza tra x e y .

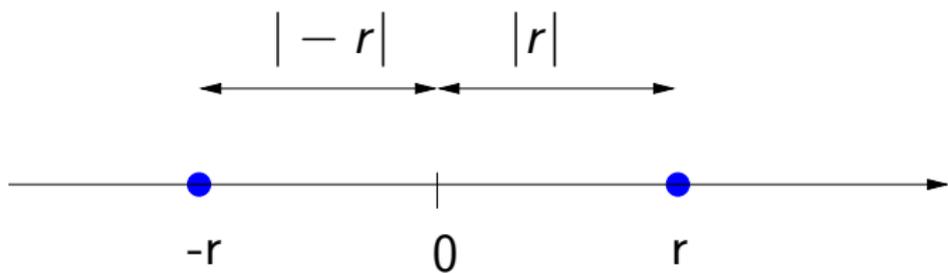
N.B. Una distanza è sempre un numero reale positivo.

Equazioni con il valore assoluto

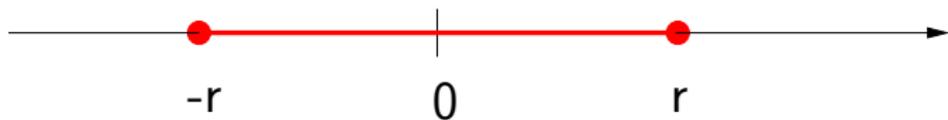
1. L'equazione $|x| = r$, con $r \in \mathbb{R}^+$ assegnato, ha due soluzioni:
 $x_1 = r$ e $x_2 = -r$



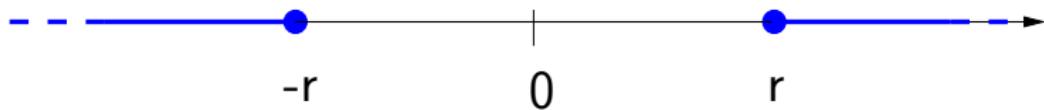
Es. Le soluzioni dell'eqz. $|x| = \sqrt{2}$ sono $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.



2. I punti $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione $|x| \leq r$ sono tutti e soli i punti $x \in \mathbb{R} : -r \leq x \leq r$, ovvero tutti i punti che distano da zero r o meno di r .



3. I punti $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disequazione $|x| \geq r$ sono tutti e soli i punti $x \in \mathbb{R} : x \leq -r$ oppure $x \geq r$, ovvero tutti i punti che distano da zero r o più di r .



Intervalli

Def. Siano $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$. Chiamiamo **intervallo chiuso** di estremi a e b l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$



Se $a < b$, chiamiamo **intervallo aperto** di estremi a e b l'insieme

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$



(a, b) si può scrivere anche $]a, b[$.

intervallo semi-aperto a destra: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

intervallo semi-aperto a sinistra: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Intervalli definiti da una sola disuguaglianza:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$\text{oppure } (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},$$

dove i simboli $-\infty$ e $+\infty$ non indicano numeri reali, permettono di estendere l'ordinamento dei reali, attraverso la convenzione che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Si definisce la **Retta estesa** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

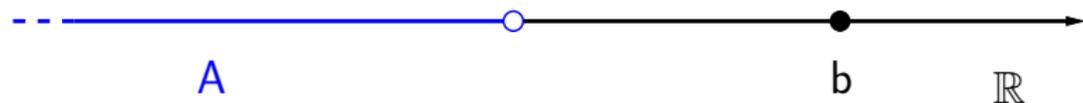
In generale: un intervallo si dice **chiuso** se include i suoi estremi, **aperto** se esclude i suoi estremi.

Def. I punti dell'intervallo che non sono estremi dell'intervallo sono detti **punti interni**.

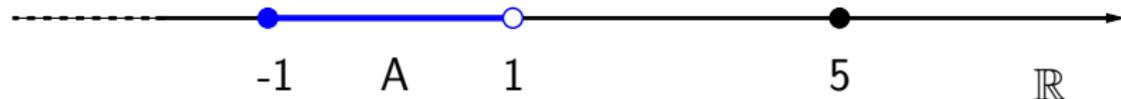
Maggioranti di un insieme

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che un numero $b \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di A se è maggiore o uguale di ogni elemento di A , cioè:

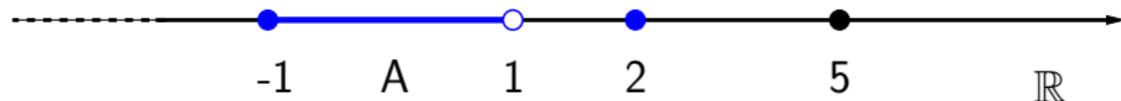
$$b \geq x, \quad \forall x \in A.$$



Es. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$. $b = 1$, $b = 5$, $b = 1000$ sono maggioranti di A . Qualunque $b \geq 1$ è maggiorante di A .



Es. $A = [-1, 1) \cup \{2\}$. Tutti i $b \geq 2$ sono maggioranti di A , $b = 1.6$ non è maggiorante di A .



Insiemi superiormente limitati

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che A è **superiormente limitato** se ammette dei maggioranti.

Es. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ è superiormente limitato.

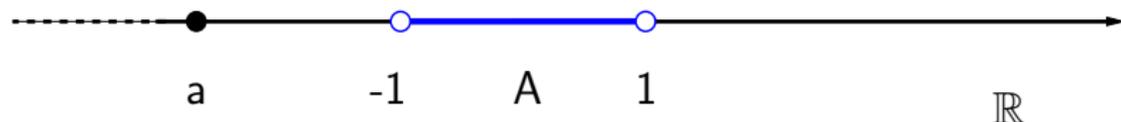
$A = [-1, 1) \cup \{2\}$ è superiormente limitato.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ **NON** è superiormente limitato, non ammette maggioranti.

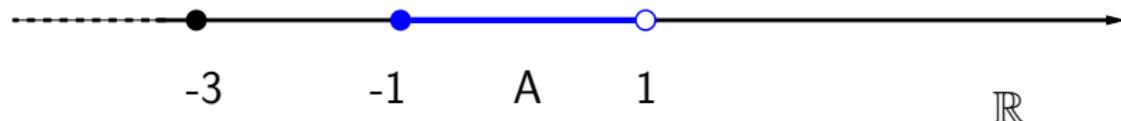
Minoranti di un insieme

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che un numero $a \in \mathbb{R}$ è **un minorante** di A se è minore o uguale di ogni elemento di A , cioè:

$$a \leq x, \quad \forall x \in A.$$



Es. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$. $a = -1$, $a = -3, 5$, $a = -100$ sono minoranti di A . Qualunque $a \leq -1$ è minorante di A .



Es. $A = [-1, 1) \cup \{2\}$. Qualunque $a \leq -1$ è minorante di A .

Insiemi inferiormente limitati

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diciamo che A è **inferiormente limitato** se ammette minoranti.

Es. $A = [-1, 1) \cup \{2\}$. A è inferiormente limitato.

Es. $A = (-\infty, 1)$. A è superiormente limitato, ma non inferiormente limitato: tutti i numeri reali $x \geq 1$ sono maggioranti di A , mentre non esistono minoranti di A .

Es. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è inferiormente limitato, ma non superiormente. Qualunque $a \leq 0$ è un minorante di \mathbb{N} , ma:

non esiste $b \in \mathbb{R}$ maggiorante di \mathbb{N} . **Proprietà di Archimede**

Insiemi limitati

Def. Si dice che A è **limitato** se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitato.

L'intervallo $[-5, \pi)$ è limitato. I suoi minoranti sono tutti i numeri reali $x \leq -5$, i suoi maggioranti sono tutti i numeri reali $x \geq \pi$

Massimo di un insieme

Def. Chiamiamo **massimo dell'insieme** $A \subset \mathbb{R}$ (e lo denotiamo **max** A) un maggiorante x_M dell'insieme A che appartiene all'insieme stesso. Ovvero

$$x_M = \max A \quad \text{se} \quad x_M \geq x \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad x_M \in A.$$

Es. $A = (-5, 2]$. Ogni $x \geq 2$ è maggiorante di A , $x_M = 2$ è maggiorante di A e appartiene ad A , quindi **max** $A = 2$.

Minimo di un insieme

Def. Chiamiamo **minimo dell'insieme** $A \subset \mathbb{R}$ (e lo denotiamo **min A**) un minorante x_m dell'insieme A che appartiene all'insieme stesso. Ovvero

$$x_m = \min A \quad \text{se} \quad x_m \leq x \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad x_m \in A.$$

Es. $A = [-5, 2)$. Ogni $x \leq -5$ è minorante di A , $x_m = -5$ è minorante di A e appartiene ad A , quindi **min A = $x_m = -5$** .
Ogni $x \geq 2$ è maggiorante di A , $x = 2$ è maggiorante di A , ma NON appartiene ad A , quindi **$\nexists \max A$** .

Teorema. Massimo e minimo di un insieme, se esistono, sono unici.

Estremo superiore di un insieme

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. Chiamiamo **estremo superiore** di A il più piccolo dei maggioranti di A e lo denotiamo con $\sup A$.

Proprietà. Se $\exists \max A$ allora $\exists \sup A$ e $\sup A = \max A$. Tuttavia può esistere $\sup A$ senza che esista $\max A$.

Es. $A = (0, 2)$. $x = 2$ è $\sup A$ ma non è $\max A$.
 $A = (0, 2]$. $x = 2$ è $\max A$ e anche $\sup A$.

Se un insieme non è superiormente limitato, diciamo che

$$\sup A = +\infty$$

Estremo inferiore di un insieme

Sia $A \subset \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Chiamiamo **estremo inferiore** di A il più grande dei minoranti di A e lo denotiamo con **inf A** .

Proprietà. Se $\exists \min A$ allora $\exists \inf A$ e $\inf A = \min A$. Tuttavia può esistere $\inf A$ senza che esista $\min A$.

Es. $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\inf A = -\sqrt{2}$, ma $\nexists \min A$.

Se un insieme non è inferiormente limitato, diciamo che

$$\inf A = -\infty$$

Caratterizzazione matematica del sup

Il **sup** A è caratterizzato dalle seguenti due condizioni:

1) $\forall x \in A, x \leq \sup A$

(ovvero $\sup A$ è un maggiorante di A)

2) $\forall r \in \mathbb{R}, r < \sup A, \exists x \in A \mid x > r.$

(ovvero $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A , perché un qualsiasi altro numero reale r minore di $\sup A$ non è più maggiorante di A)



Caratterizzazione matematica dell'inf

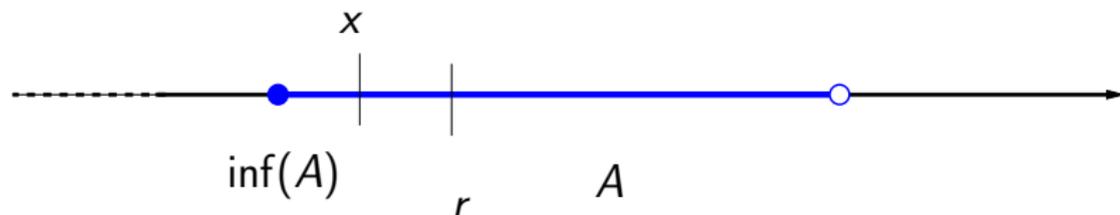
L'**inf** A è caratterizzato dalle seguenti due condizioni:

1) $\forall x \in A, x \geq \inf A$

(ovvero $\inf A$ è un minorante di A)

2) $\forall r \in \mathbb{R}, r > \inf A, \exists x \in A \mid x < r.$

(ovvero $\inf A$ è il più grande dei minoranti di A , perché un qualsiasi altro numero reale r maggiore di $\inf A$ non è più minorante di A)



Proprietà. Se esistono \inf e \sup di un insieme, questi sono unici.

N.B. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

mentre

$\{x \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\} \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Es. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

A è limitato in \mathbb{R} ed ha massimo e minimo.

Riferimenti bibliografici: Capitolo 1 del libro di testo (sia Pearson che Springer)

Esercizi del capitolo 1 del libro di testo.

Esercizio: Individuare le proprietà dei seguenti intervalli (aperto, chiuso, semi-aperto a destra o a sinistra, limitato); individuare inf e sup e, qualora esistano, anche min e max.

$$\begin{aligned} &(-5, 4], \quad (-\infty, 0), \quad \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}, \\ &\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \pi\}, \quad]2, 18[, \quad [-2\pi, 2\pi), \\ &\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}. \end{aligned}$$

Esercizio: individuare inf, sup, maggioranti e minoranti dei seguenti insiemi e, qualora esistano, anche min e max.

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| > 4\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3 \vee |x + 1| > 8\}, \\ &\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \pi \wedge |x| > 2\}, \quad (2, 10], \quad [-2\pi, 2\pi) \cup \{6\}, \\ &\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 1\}, \\ &\left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3}{3x + 5}} \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$