

STUDIO DI FUNZIONE e CALCOLO DIFFERENZIALE

Studio di funzione

Il nostro obiettivo è rappresentare graficamente una funzione

$f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

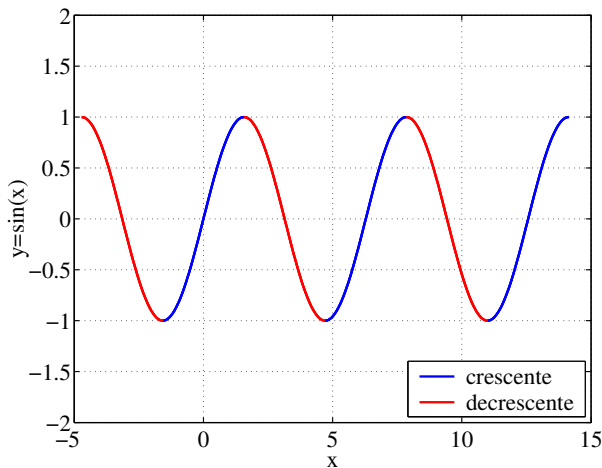
Con le conoscenze attuali possiamo studiare

- il dominio ed eventuali simmetrie
- la classificazione dei punti di discontinuità
- il comportamento limite agli estremi del dominio (limiti e asintoti)
- eventuali intersezioni con gli assi cartesiani

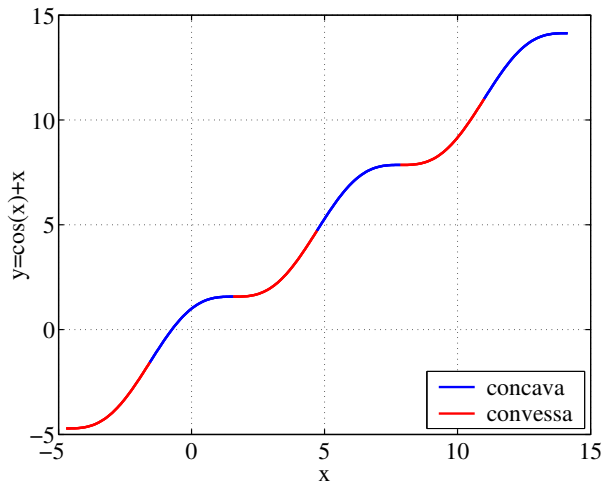
Cosa manca?

Tutta la parte di rappresentazione grafica "al finito", ovvero:

Bisogna saper dire per quali valori di $x \in \text{dom}f$ la funzione è **crescente** e per quali valori di $x \in \text{dom}f$ la funzione è **decescente**:



Bisogna saper dire per quali valori di $x \in \text{dom}f$ la funzione è **convessa** e per quali valori di $x \in \text{dom}f$ la funzione è **concava**:



Crescenza/decrecenza e convessità/concavità sono informazioni che si estraggono dalle **DERIVATE** della funzione.



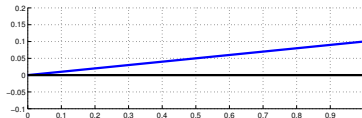
Dobbiamo introdurre il concetto di derivata in un punto
e di funzione derivata

Le strade di San Francisco



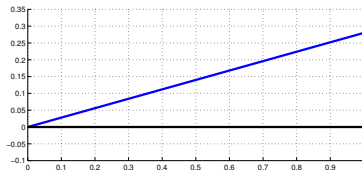


$$y = mx$$



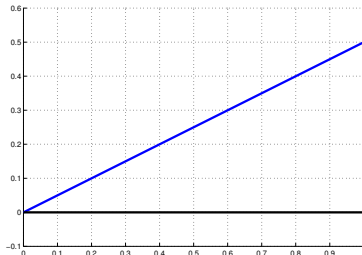
$$m = 0.10$$

$$= \operatorname{tg}(5.7^\circ)$$



$$m = 0.28$$

$$= \operatorname{tg}(15.6^\circ)$$



$$m = 0.50$$

$$= \operatorname{tg}(26.6^\circ)$$

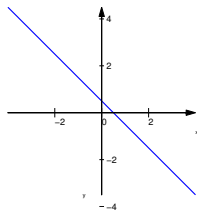
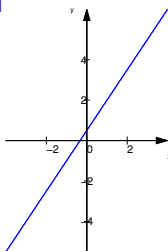
Coefficiente angolare di una retta

Data la funzione $y = f(x) = mx + q$
il **coefficiente angolare** m ,
indica la **pendenza** della retta.

- $m > 0 \Leftrightarrow$ retta crescente,
- $m < 0 \Leftrightarrow$ retta decrescente,
- maggiore è il coefficiente angolare (positivo), maggiore è la pendenza,
- Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ la retta passante per essi ha **coeff. angolare** $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e l'equazione è:

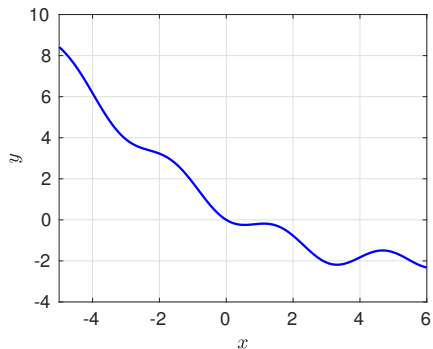
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2$$

- rette verticali hanno coeff. angolare $m = \infty$.



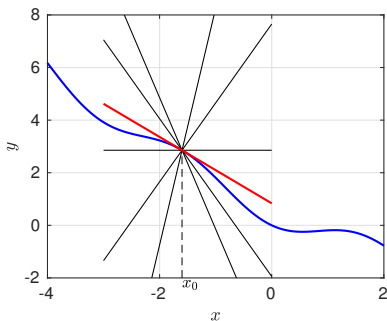
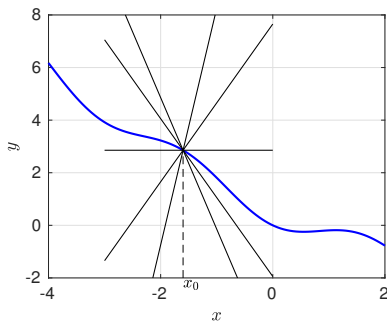
$$f(x) = x^2/10 - x + \sin^2(x)$$

in $(-5, 10) \times (-5, 10)$



Questa funzione non è una retta: **cambia pendenza in ogni punto**
 Ma cosa intendiamo per pendenza se f non è una retta?
<https://ccatterina.github.io/MathCanvas/>

Quando una funzione non è una retta e parliamo di pendenza in un punto x_0 , stiamo pensando alla pendenza della retta che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ e che **approssima** la funzione **meglio** di tutte le altre rette che passano per quel punto.



Cosa vuol dire che “approssima meglio”?

LA DERIVATA (definizione).

Sia $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; sia

$x_0 \in \text{dom}(f)$ e punto di acc. per $\text{dom}(f)$.

Def. Se esiste (finito o infinito) il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,
poniamo

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e chiamiamo **derivata prima di f in x_0** il valore $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ (cioè è finito), diciamo che **f è derivabile in x_0** .

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è detto **rapporto incrementale**, quindi si dice anche
che **la derivata prima nel punto x_0 è il limite del rapporto
incrementale di f quando x tende a x_0 .**

Esempio 1. Calcolare la **derivata** di $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 1$ e dire se f è derivabile in $x_0 = 1$.

Guardo se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{con } x_0 = 1$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = [(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})} = 1/3. \end{aligned}$$

Il limite esiste finito uguale a $1/3$, quindi $f'(1) = 1/3$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in $x_0 = 1$.

cambiamo x_0

Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$ e dire se f è derivabile in $x_0 = 0$.

Guardo se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{con } x_0 = 0$$

Si ha:

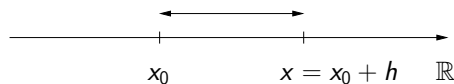
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = [\dots \text{prop. delle potenze} \dots] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty. \end{aligned}$$

Il limite esiste, **MA NON È finito**, allora abbiamo che $f'(0) = +\infty$, ma $f(x) = \sqrt[3]{x}$ NON è derivabile in $x_0 = 0$.

La derivata

Partendo da: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

e facendo la **sostituzione** $x = x_0 + h$, con $h \in \mathbb{R}$



possiamo anche scrivere:

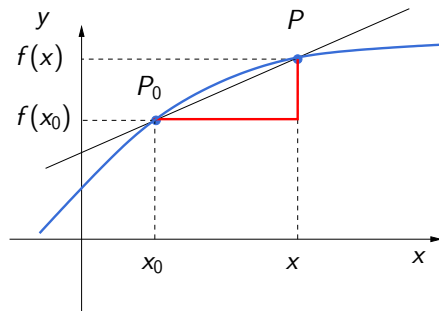
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Altri simboli spesso usati per denotare la derivata in x_0 sono:

$$y'(x_0) \text{ (se } y = f(x)), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0).$$

La derivata: significato geometrico (NON è la definizione)

Sia $x - x_0$ l'incremento (> 0 o < 0) della variabile indipendente x e $f(x) - f(x_0)$ l'incremento (> 0 o < 0) della variabile dipendente y . Sia f derivabile in x_0 .



$$P_0 = (x_0, f(x_0)), \\ P = (x, f(x))$$

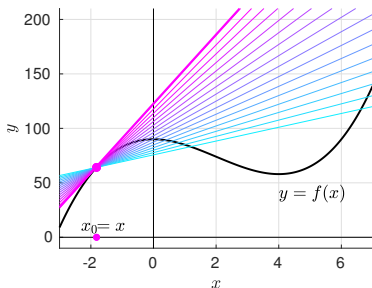
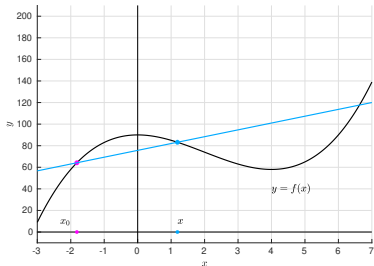
Il coefficiente angolare della retta passante per i punti P_0 e P è

$$m_{(x_0, x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (=rapporto incrementale)}$$

Il **rapporto incrementale di f in x_0** dipende sia da x che da x_0 .

Che significato ha calcolare il limite del **rapporto incrementale** (ovvero del **coefficiente angolare** della retta passante per P e P_0) quando $x \rightarrow x_0$?

Chi è $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} m_{(x_0, x)}$?

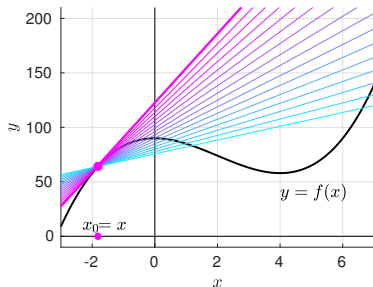


x_0 è fisso, mentre x si muove verso x_0
(der.1.m)

Retta tangente al grafico di una funzione

Geometricamente, la derivata prima di f nel punto x_0 (ovvero $f'(x_0)$) è il **limite per $x \rightarrow x_0$** dei coefficienti angolari $m_{(x_0, x)}$ delle rette passanti per i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x, f(x))$.

La retta tangente è il limite (per $x \rightarrow x_0$) delle rette che intersecano f nei punti di ascisse x e x_0 .



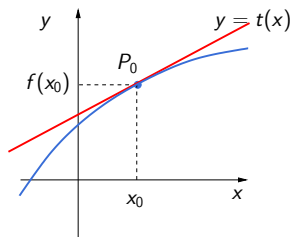
Retta tangente al grafico di una funzione

Sia f derivabile in x_0 .

Definiamo **retta tangente ad $y = f(x)$ nel punto x_0** la retta di equazione

$$y = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

il cui **coefficiente angolare** è $m = f'(x_0)$



Osservazione. Se $f(x)$ è una retta, la retta tangente ad f in un qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$ coincide con la retta stessa.

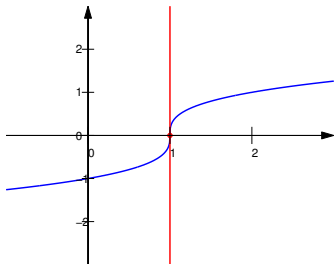
(continua)

Se f è continua in x_0 e $f'(x_0) = +\infty$ o $f'(x_0) = -\infty$, definiamo **retta tangente ad $y = f(x)$ nel punto x_0** la retta (verticale) di equazione

$$x = x_0$$

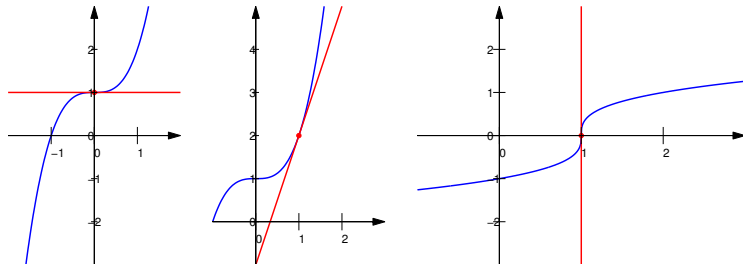
il cui **coefficiente angolare** è $m = +\infty$ (o $m = -\infty$)

Esempio con $m = +\infty$:



Derivabilità, significato geometrico

Geometricamente, una funzione f è derivabile in x_0 se esiste la retta tangente ad f nel punto x_0 e questa non è una retta verticale.



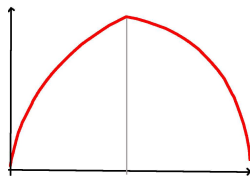
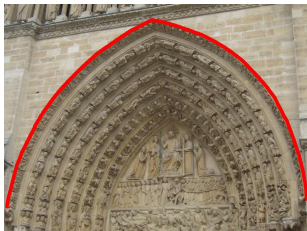
La funzione dei primi due grafici è $f(x) = x^3 + 1$ ed è derivabile sia in $x_0 = 0$ che in $x_0 = 1$ (le rette tangenti sono una orizzontale e l'altra obliqua, quindi il loro coeff. angolare è un numero reale). La funzione del grafico a destra è $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Questa f non è derivabile in $x_0 = 1$ (la retta tangente è verticale e il suo coeff. angolare è ∞).

Esercizi

1. Calcolare l'espressione della retta tangente a $f(x) = x^3 + 1$ in $x_0 = 0$ disegnarla. Ripetere il lavoro in $x_0 = 1$.
Utilizzare la formula di pagina 8.

2. Calcolare l'espressione della retta tangente a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$ disegnarla.

Arco a sesto acuto



Esiste una tangente nel vertice dell'arco?

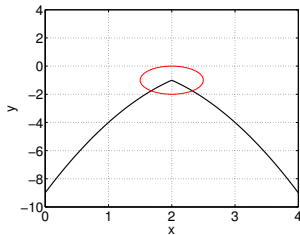
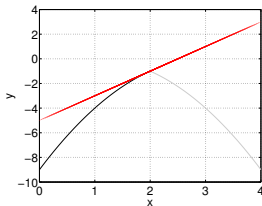
Rappresentiamo l'arco con una funzione matematica

Sia

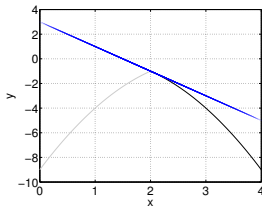
$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)^2 & x \leq 2 \\ -(x-1)^2 & x > 2 \end{cases}$$

Esiste una retta tangente a
 $y = f(x)$ in $x_0 = 2$?

Per $x < 2$:



Per $x > 2$:



In $x_0 = 2$ non esiste una sola tangente, ma ne esiste una (rossa) se analizzo il comportamento di f a sinistra di $x_0 = 2$, e un'altra (blue) se analizzo il comportamento di f a destra di $x_0 = 2$.

f non è derivabile in $x_0 = 2$.

In tutti gli altri punti $x \neq 2$, esiste unica retta tangente alla funzione, cioè f è derivabile in tutti gli $x \neq 2$.

Derivabilità: significato geometrico

In conclusione, f è derivabile in x_0 se esiste una sola retta tangente in x_0 e questa non è una retta verticale.

Derivate destra e sinistra

Poichè la derivata è un limite, possiamo definire

derivata sinistra di f in x_0 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

e **derivata destra di f in x_0** $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

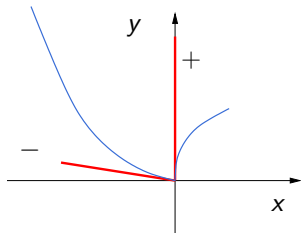
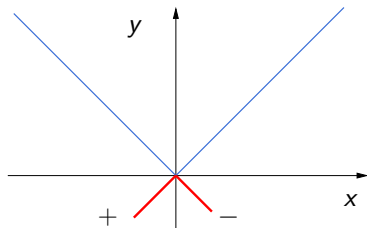
Sappiamo che un limite esiste se esistono limite destro e sinistro e questi sono uguali. In maniera analoga possiamo concludere che

Proprietà. f è derivabile in x_0 se esistono finite ed uguali la derivata destra e sinistra in x_0 .

Se questa proprietà non si verifica, chiamiamo **x_0 punto di non derivabilità.**

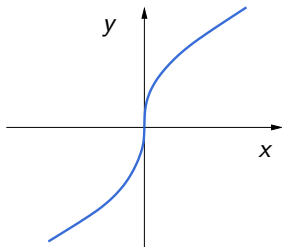
Classificazione dei punti di non derivabilità

Punto angoloso. $x_0 \in \text{dom}(f)$ è punto angoloso per f se:
 f è continua in x_0 ed esistono derivata destra e sinistra, di f in x_0 ,
diverse ed almeno una delle due finita.



Es. $x_0 = 0$ per $f(x) = |x|$. $x_0 = \pm 2$ per $f(x) = |x^2 - 4|$, ...

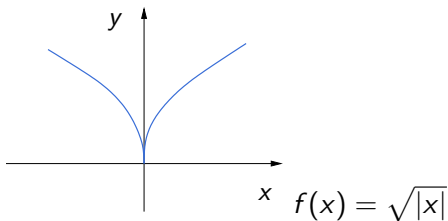
Punto a tangente verticale $x_0 \in \text{dom}(f)$ è punto a tangente verticale per f se:
 f è continua in x_0 ed esistono derivata destra e sinistra, di f in x_0 ,
entrambe infinite e di segno concorde.



$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'_-(0) = f'_+(0) = +\infty$$

Cuspide $x_0 \in \text{dom}(f)$ è punto di cuspide per f se:
 f è continua in x_0 ed esistono derivata destra e sinistra, di f in x_0 ,
entrambe infinite e di segno discorde.



$$f'_-(0) = -\infty, \quad f'_+(0) = +\infty \text{ (VERIFICARE con i conti)}$$

Cosa succede quando f non è continua in x_0

Prendiamo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

f non è continua in $x_0 = 0$. Calcoliamo $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - 1}{x} = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$\Rightarrow f$ non è derivabile in x_0 .

La funzione derivata prima $f'(x)$

Def. Sia I un intervallo contenuto nel dominio di f . Se f è derivabile in ogni punto di I , diciamo che f è derivabile in I .

Def. Poniamo $\text{dom}(f') = \{x \in \text{dom}(f) : f \text{ è derivabile in } x\}$.

definiamo **funzione derivata prima di f** la funzione che associa ad ogni $x \in \text{dom}(f')$ il valore $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f' : \text{dom}(f') &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Osservazione. Un punto di non derivabilità per f è un punto che NON appartiene al $\text{dom}(f')$.

Proposizione. Se f è una funzione derivabile in un punto x_0 , allora ivi è continua.

Dim. La tesi è $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Non è vero che se una funzione è continua in un punto allora lì è anche derivabile.

Esempi già incontrati: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x_0 = 0$.

L'arco a sesto acuto è continua, ma nel punto di massimo assoluto non è derivabile.

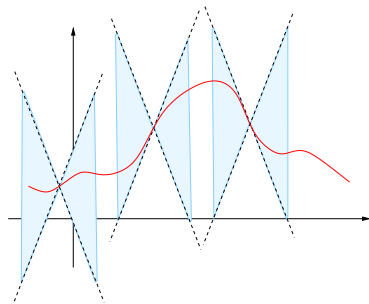
Funzioni Lipschitziane

Def.

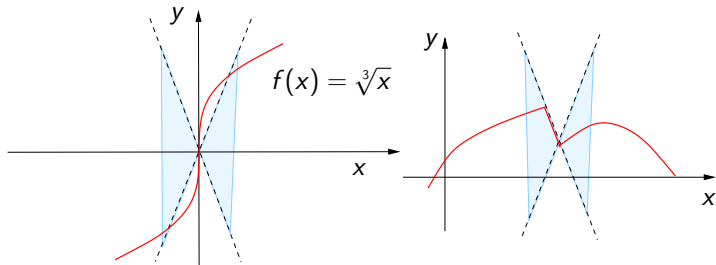
Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è **lipschitziana** se $\exists L \geq 0$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|, \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

o equivalentemente (quando $x_1 \neq x_2$) se $\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq L$, cioè f ha tutti i rapporti incrementali limitati da un numero reale positivo $L < +\infty$.



Se f è lips con costante L , disegno le rette con coeff. angolare $+L$ e $-L$ passanti per un punto del grafico di f . Il grafico della funzione si trova nella parte di piano colorata, qualunque sia il punto del grafico che prendo come punto di passaggio di entrambe le due rette. (lips.m)



Oss. Se la funzione ha un punto a tangenza verticale in un intervallo I , allora non è lips. su I . Se L è finito, la regione di piano colorata esclude necessariamente dei punti del grafico (vicino al punto a tang. verticale)

Oss. Se una funzione ha punti angolosi in I (ma non punti a tangenza verticale), allora è lips. su I (figura a destra).

Teorema

Se f è lipschitziana in un intervallo I , allora ivi è anche continua.

Dim. L'ipotesi dice che:

$$\exists L > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Sia x_0 un generico punto in I .

Per dimostrare che f è continua in x_0 , dobbiamo verificare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Se $x, x_0 \in I$, allora per essi vale la disuguaglianza di lipschitzianità
 $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$.

Se prendo $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ con $\delta_\varepsilon = \varepsilon/L$, si ha:

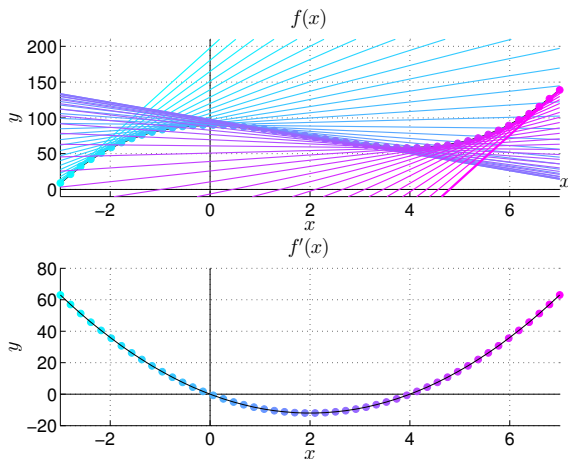
$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

ovvero la continuità in x_0 .

Poichè x_0 è arbitrario in I , segue che f è continua in I .

La funzione derivata prima

$$\begin{aligned} f' : \operatorname{dom}(f') &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$



funzione_derivata.m

Regole di derivazione

$f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ dato.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

La derivata della funzione costante $f(x) = c$ è la funzione identicamente **nulla**.

$f(x) = ax + b$, con a e b parametri reali. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ dato.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ dove}$$

$f(x_0) = ax_0 + b$ e $f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b$ Allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a.$$

La derivata di $f(x) = ax + b$ è la funzione **$f'(x) = a$**

$f(x) = x^2$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ dato.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} =$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2hx_0}{h} = 2x_0.$$

La derivata di $f(x) = x^2$ è la funzione $f'(x) = 2x$.

$f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ dato.

La derivata di $f(x) = x^n$ è la funzione $f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

La derivata di $f(x) = x^\alpha$ è la funzione $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Oss. Poiché f' è una funzione, bisogna chiedersi quale sia il dominio di f' .

$$\alpha \geq 1. \quad f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}. \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{3}{2}x^{1/2}.$$

$\text{dom}(f) = [0, +\infty)$ e $\text{dom}(f') = [0, +\infty)$.

$$0 < \alpha < 1. \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$\text{dom}(f) = [0, +\infty)$ e $\text{dom}(f') = (0, +\infty)$.

$f(x) = \sin(x)$. Si utilizzano le formule di prostaferesi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2) \cos(x_0 + h/2)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h/2) = 1 \cdot \cos(x_0).$$

La derivata di $f(x) = \sin(x)$ è la funzione $f'(x) = \cos(x)$.

Analogamente: la derivata di $f(x) = \cos(x)$ è $f'(x) = -\sin(x)$.

$f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \cdot \log_e a.$$

La derivata di $f(x) = a^x$ è la funzione $f'(x) = a^x \cdot \log_e a$.

La derivata di $f(x) = e^x$ è la funzione $f'(x) = e^x$.

Algebra delle derivate

Teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono derivabili anche le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e, se $g(x_0) \neq 0$, $f(x)/g(x)$. Si ha:

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.\end{aligned}$$

Es. $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$.

$$(f + g)(x) = x^3 + e^x, \quad (f + g)'(x) = 3x^2 + e^x,$$

$$(fg)'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x \text{ e}$$

$$(f/g)'(x) = \frac{3x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}.$$

Dimostriamo la formula della derivata del prodotto:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0 + h)g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0 + h)g(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\&= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

La derivata è un operatore lineare

Sia V è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, A è un operatore lineare su V se $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$A(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha A\mathbf{u} + \beta A\mathbf{v}$$

Corollario dell'algebra delle derivate

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili nel punto $x_0 \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ e siano α e $\beta \in \mathbb{R}$. Allora è derivabile anche la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ e si ha

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0),$$

cioè la derivata è un **operatore lineare**.

Es. $f(x) = 3 \sin(x) - 5x^4$.

$$f'(x) = (3 \sin(x) - 5x^4)' = 3(\sin(x))' - 5(x^4)' = 3 \cos(x) - 5 \cdot 4x^3.$$

Derivata di una funzione composta

Teorema. Sia $f(x)$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $g(y)$ una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $h(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Es. $h(x) = (\sin(x))^2$.

$$h(x) = g(f(x)) = g(y) \quad \text{con} \quad y = f(x) = \sin(x) \quad \text{e}$$

$$g(y) = y^2.$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad g'(y) = 2y.$$

$$h'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = 2y \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Derivata della funzione inversa

Teorema. Sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia f derivabile in x_0 , con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

(se $y_0 = f(x_0)$ allora $x_0 = f^{-1}(y_0)$).

Es. Consideriamo $y = f(x) = e^x$ su $\mathbb{R}$: è continua, invertibile e derivabile.

La sua funzione inversa è $f^{-1}(y) = \log(y)$ con $y \in \mathbb{R}^+$.

$$(f^{-1})'(y) = (\log)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x}.$$

L'obiettivo è riuscire a scrivere $\frac{1}{e^x}$ dipendente da y e non da x .

Ma $y = e^x$, quindi

$$(\log)'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

In maniera analoga si dimostra che:

la derivata di $f(x) = \arcsin(x)$ è $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

la derivata di $f(x) = \arccos(x)$ è $(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

la derivata di $f(x) = \arctan(x)$ è $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Riferimenti bibliografici:

Canuto Tabacco (ed. Springer): Sez. 6.1, 6.2, 6.3.

Canuto Tabacco (ed. Pearson): Sez. 8.1, 8.2, 8.3.

Esercizi: Calcolare le derivate delle varie funzioni di cui si è studiato il dominio e delle varie funzioni che si trovano nei temi d'esame assegnati gli anni precedenti.

Esercizi 1,2,3, del cap. 6 (ed. Springer) o 8 (ed. Pearson) del libro.

Esercizi degli appelli di Analisi Matematica A degli Anni

Accademici scorsi in cui si chiede di studiare la derivabilità della funzione.