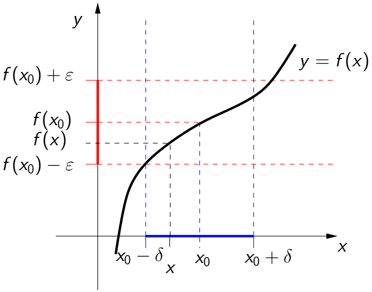
CONTINUITA'

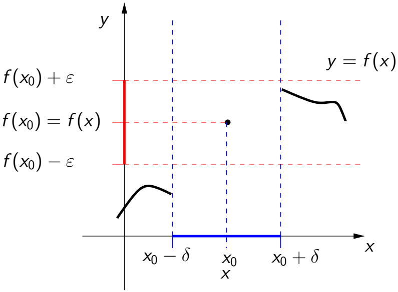
Funzione continua in un punto

Def. Sia $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. La funzione f si dice **continua in** x_0 se

$$\forall I_\varepsilon(f(x_0)),\ \exists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$$



x_0 p. di acc. per $dom(f)$

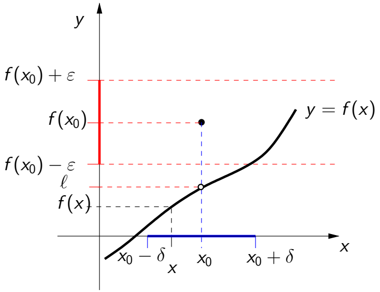


x_0 p. isolato per $dom(f)$

o equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in \mathrm{dom}(f)\ e\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Un esempio di una funzione non continua in x_0



x_0 è punto di acc. per $dom(f)$, ma non è soddisfatta la definizione:

$$\forall I_\varepsilon(f(x_0)),\ \nexists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$$

Confronto con la definizione di limite

Sia $x_0 \in \text{dom}(f)$. La funzione f si dice **continua in** x_0 se

$$\forall I_\varepsilon(f(x_0)),\ \exists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \text{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$$

o equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in \text{dom}(f) \text{ e } |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Sia x_0 punto di acc. per $\text{dom}(f)$, **esiste limite** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$$\forall I_\varepsilon(\ell),\ \exists I_\delta(x_0):\ \forall x \in \text{dom}(f) \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \ \Rightarrow\ f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in \text{dom}(f) \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Osservare bene le differenze e le analogie tra la def. di limite e la def. di funzione continua in un punto.

Quindi:

- **Per poter calcolare** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$:
  - f può non essere definita in x_0,
  - x_0 deve essere punto di acc. per il $dom(f)$,

- **Per poter studiare la continuità** di f in x_0:
  - x_0 deve appartenere al $dom(f)$, cioè f deve essere definita in x_0,
  - x_0 non necessariamente deve essere un punto di acc. per il $dom(f)$, ma x_0 può essere anche punto isolato.

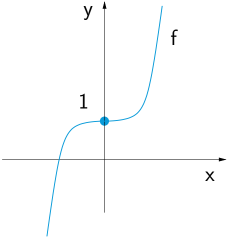
Conclusione sulla continuità:

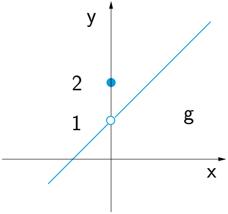
- se $x_0 \in dom(f)$ è punto isolato ALLORA f è sempre continua in x_0,
- se $x_0 \in dom(f)$ è punto di accumulazione per $dom(f)$, ALLORA

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Osservazione. Siccome f è sempre continua nei punti isolati, sarà interessante studiare la continuità solo in punti di accumulazione che stanno nel dominio di f.

Una funzione continua in $x_0 = 0$ e una no





In entrambi i casi $x_0 = 0 \in dom(f)$ ed è punto di accumulazione per $dom(f)$

$f(x) = 3x^3 + 1$	$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$	$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$
$f(0) = 1$	$g(0) = 2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f(x)$ è continua in $x_0 = 0$	$g(x)$ NON è continua in $x_0 = 0$

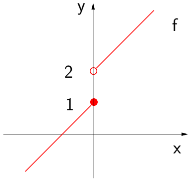
Continuità da sinistra e da destra

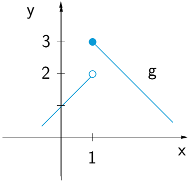
Sia $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ e di accumulazione per $\mathrm{dom}(f)$.
Def. Una funzione f definita in un intorno sinistro di x_0 è continua da sinistra in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Def. Una funzione f definita in un intorno destro di x_0 è continua da destra in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$





$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1, \;\; f(0) = 1$
f è continua da sinistra
$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \neq f(0)$
f NON è continua da destra

$\displaystyle\lim_{x \to 1^+} g(x) = 3, \;\; g(1) = 3$
g è continua da destra
$\displaystyle\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2 \neq g(1)$
g NON è continua da sinistra

Funzioni continue

Proprietà una funzione f definita in un intorno di x_0 è continua in x_0 se e solo se è continua da destra e da sinistra in x_0.
Def. Una funzione che non è continua in x_0 si dice DISCONTINUA in x_0.
Def. f si dice **continua su un insieme** $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ se è continua in ogni punto di A.

Proposizione. Tutte le funzioni elementari (monomi, funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali e loro funzioni inverse) sono continue in tutto il loro dominio.

Corollario al Thm dell'algebra dei limiti.
Siano f e g due funzioni continue in $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono continue in x_0 anche le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (quest'ultima a patto che $g(x_0) \neq 0$.)

Sia $x_0 \in dom(f)$ è punto di accumulazione per $dom(f)$, ricordo che

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè:

– se so che f è continua allora deduco che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

– se trovo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ allora deduco che f è continua in x_0.

Esempio: So che $f(x) = \sin(x)$ è continua perchè è una funzione elementare, allora $\lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$.

Attenzione: Sia $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Io non so a priori se f è continua o meno in $x_0 = 0$, quindi, **NON** posso concludere che $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Teorema di sostituzione o del limite di funzioni composte

Questo teorema serve per calcolare il limite di funzioni composte sfruttando limiti fondamentali o altri limiti già noti.
Ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(1-x^2)/x}$$

o

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{x^2-1}{3+2x^3}\right)$$

o

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan|3-e^x|.$$

Più in generale, dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)).$$

Teorema di sostituzione (caso 1)

1. Se esiste $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell = \pm\infty$ ed esiste $\lim\limits_{y\to\ell} g(y)$,

ALLORA esiste $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to\ell} g(y)$$

Esempio 1.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \qquad = \qquad \lim_{y\to\ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \underset{\text{sostituzione}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \qquad \lim_{y\to+\infty} \arctan(y)$$

1. Pongo $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

cioè: se $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$. $\ell = +\infty$.

3. Sostituisco: $\frac{1}{x}$ con y e $x \to 0^+$ con $y \to +\infty$

4. 4. Si ha $g(y) = \arctan(y)$. Calcolo
$\lim_{y\to+\infty} g(y) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \dfrac{\pi}{2}$

Esempio 1bis.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \qquad = \qquad \lim_{y\to \ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} \qquad = \qquad \lim_{y\to -\infty} e^{y}$$

$$\uparrow$$

sostituzione y=f(x)

1. Pongo $y = f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = -\infty$

cioè: se $x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$. $\ell = -\infty$.

3. Sostituisco: $\frac{1-x^2}{x}$ con y e $x \to +\infty$ con $y \to -\infty$
4. Si ha $g(y) = e^y$. Calcolo $\lim_{y\to-\infty} g(y) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$

Teorema di sostituzione (caso 2)

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e g è definita e continua in $y = \ell$,

ALLORA esiste $\lim_{x \to x_0} g(f(x))$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y)$$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \qquad = \qquad \lim_{y\to \ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{x^2-1}{3+2x^3}\right) \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituzione}}}{=} \qquad \lim_{y\to 0} \sin(y)$$

1. Pongo $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{3+2x^3}$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{3+2x^3} = 0$

cioè: se $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$. $\ell = 0$, $g(y) = \sin(y)$ è continua in 0.

3. Sostituisco: $\frac{x^2-1}{3+2x^3}$ con y e $x \to +\infty$ con $y \to 0$
4. Si ha $g(y) = \sin(y)$. Calcolo $\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \sin(y) = 0$

Teorema di sostituzione (caso 3).

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, esiste $\lim_{y\to\ell} g(y)$ ed esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $f(x) \neq \ell$ per ogni $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$,

ALLORA esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to\ell} g(y)$$

Esempio 3.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \qquad = \qquad \lim_{y\to \ell} g(y)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\log(x))}{\log(x)} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sostituzione}}}{=} \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}$$

1. Pongo $y = f(x) = \log(x)$
2. Calcolo $\ell = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \log(x) = 0$

cioè: se $x \to 1 \Rightarrow y \to 0$. $\ell = 0$, $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 1$ e $\exists \lim_{y\to\ell} g(y)$ (anche se g non è definita in $y = 0$).

3. Sostituisco: $\log(x)$ con y e $x \to 1$ con $y \to 0$
4. Si ha $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$. Calcolo $\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$

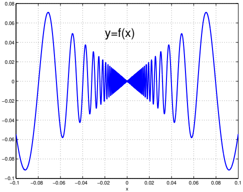
Approfondimento

Un esempio a cui non è possibile applicare il teorema di sostituzione.
$\lim_{x\to 0} |sign(x\sin(1/x))|$. $(x_0 = 0)$.

$$y = f(x) = x\sin(1/x), \qquad g(y) = |sign(y)| = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$\exists \ell = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $f(x) = \ell = 0$ in infiniti punti in $I(x_0)$;
esiste $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, ma $g(0) = 0 \Rightarrow g$ NON è continua in $\ell = 0$;

le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, cosa succede?



In un intorno, anche molto piccolo di 0, f assume valore nullo in infiniti punti, tutti quelli del tipo $x = 1/(k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ e non nullo. In tutti i punti in cui f si annulla, la funzione g ha valore zero, in tutti gli altri punti g ha valore 1.
La funzione $g(f(x))$ continua ad oscillare tra i valori 0 e 1.

$\nexists \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} |sign(x\sin(1/x))|$, anche se $\exists \lim_{y\to 0} g(y) = 1$

Conseguenza del teorema di sostituzione

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e se g è una funzione definita in un intorno di ℓ ed è continua in ℓ,
allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to\ell} g(y) = g(\ell) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

cioè l'operazione di limite commuta con la fuzione continua g.

Esempio. La funzione $g(x) = e^x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Composizione di funzioni continue

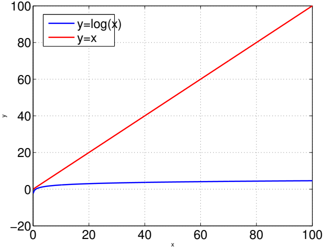
Teorema. Sia f una funzione definita e continua in un intorno di x_0 e sia $y_0 = f(x_0)$. Sia poi g una funzione definita e continua in un intorno di y_0, allora anche $h(x) = g(f(x))$ è continua in x_0.

Esempio. Sia $x_0 = 1$. La funzione $h(x) = g(f(x)) = \sin(|x-1|)$ è una funzione continua in $x_0 = 1$ perché: $f(x) = |x-1|$ è continua in $x_0 = 1$, $f(1) = 0 = y_0$ e $g(y) = \sin(y)$ è continua in $y_0 = 0$.

Si ha anche che $h(x) = \sin(|x-1|)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché sia $f(x) = |x-1|$ che $g(x) = \sin(x)$ sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

Un limite notevole

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$



$|Terra - Marte| \simeq$ 57.590.630km

$\log_{10}(57.590.630) \simeq 7.76$

$\log_e(57.590.630) \simeq 17.87$

Sia $\log(x)$ che x tendono all'infinito per $x \to +\infty$ (sono entrambe funzioni infinite), ma $\log(x)$ ha un ordine di infinito minore di x (cioè tende a $+\infty$ meno velocemente).

Es. $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x) = 0\cdot\infty$ forma indeterminata

Anzitutti riscrivo

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1/x)^{-1}}{1/x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1/x)}{1/x}$$

Applico il teorema di sostituzione con $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0^+$, $g(y) = \frac{\log y}{y}$ (verificare che le ipotesi siano soddisfatte)

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x) = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1/x)}{1/x} = -\lim_{y\to +\infty}\frac{\log y}{y} = -0^+ = 0^-$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x) = 0^-}$$

Applicazione del thm di sostituzione

Si vuole calcolare $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$.

Si utilizza l'identità

$$\boxed{(f(x))^{g(x)} = e^{\log(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\log f(x)}}$$

Quindi: $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp(g(x)\cdot\log f(x)) =$
$\displaystyle\exp\left(\lim_{x\to x_0}(g(x)\cdot\log f(x))\right)$.

Es. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x =$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(x\cdot\log x\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x)\right) = e^0 = 1.$$

Si ricorda che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x) = 0$

Partendo da $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
e applicando il Teorema di sostituzione si può dimostrare che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

.... pag. 108-109

Punti di discontinuità

Un punto di discontinuità per f è un punto in cui f non è continua.
Classificazione:

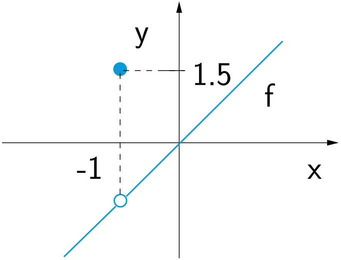
- Punto di discontinuità eliminabile
- Punto di salto
- Punto di infinito
- Punto di discontinuità di seconda specie.

Punto di discontinuità eliminabile

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e, $f(x_0) \neq \ell$ diciamo che x_0 è **punto di discontinuità eliminabile per** f.

Es.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq -1 \\ 1.5 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$



Il punto in questione è $x_0 = -1$,

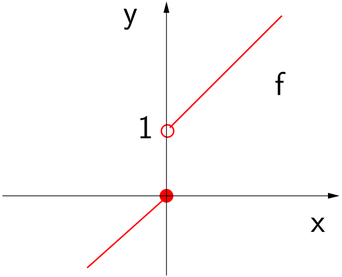
$$\lim_{x \to -1} f(x) = -1, \; f(-1) = 1.5 \neq -1$$

Punto di discontinuità di tipo salto

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se esistono finiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, con $\ell_1 \neq \ell_2$, diciamo che x_0 è **punto di discontinuità di salto per** f e si definisce salto di f in x_0 il valore $[f]_{x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Es.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$x_0 = 0$, f è definita in $I(x_0)$ incluso x_0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $[f]_0 = 1 - 0 = 1$.

Punto di infinito

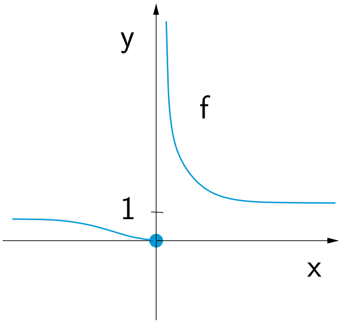
Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se esistono infiniti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, con segno uguale o diverso, o se un limite è finito e l'altro è infinito,
diciamo che x_0 è **punto di infinito per f**.

Es.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$, f è definita in $I(x_0)$.

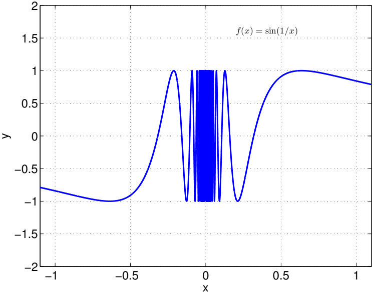
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$,



Discontinuità di seconda specie

Def. Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Se in x_0, uno dei due limiti (destro o sinistro) o entrambi non esistono, si dice che x_0 è un **punto di discontinuità di seconda specie** per f.

Es. $$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.



NON esiste $\lim_{x\to 0^-} sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e

NON esiste $\lim_{x\to 0^+} sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$x = 0$ è punto di disc. di seconda specie per $f(x)$

Schema riassuntivo sui punti di discontinuità

Sia $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ non isolato

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $f(x_0) = \ell_1 = \ell_2$	f è continua in x_0
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\ell_1 = \ell_2, f(x_0) \neq \ell_1 = \ell_2$	f è disc in x_0 p.to di disc. eliminabile
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\ell_1 \neq \ell_2$	f è disc in x_0 p.to di salto
$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ almeno uno dei due limiti è infinito	f è disc in x_0 p.to di infinito
$\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$ o $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$ almeno uno dei due limiti non esiste	f è disc in x_0 p.to di disc. di II specie

Canuto-Tabacco (ed Springer): Sezioni 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 4.1.4, 4.2
Canuto-Tabacco (ed Pearson): Sezioni 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 5.5, 5.7.

Esercizi Canuto-Tabacco (ed Springer): es. n.2, 3, 4, 5 del cap. 4.
Canuto-Tabacco (ed Pearson): es. n.2, 3, 4, 5 del cap. 5.

Esercizi

Studiare il tipo di discontinuità presente nelle seguenti funzioni.

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & x \geq 1 \\ x^2 + 3 & x < 1 \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$