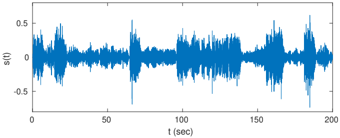
I Numeri complessi - Motivazioni

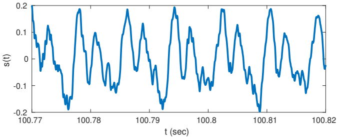
In

- Telecomunicazioni
- Elettronica
- Informatica
- Teoria dei segnali
- ...

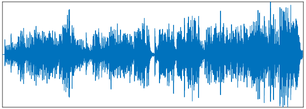
si studiano i segnali, cioè delle **grandezze fisiche** dipendenti dal tempo, matematicamente esprimibili mediante funzioni della variabile tempo:

$$s = s(t)$$



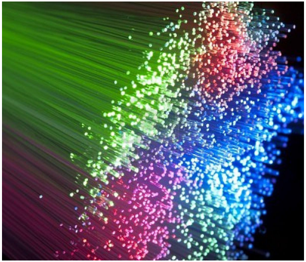


Vivaldi - La primavera

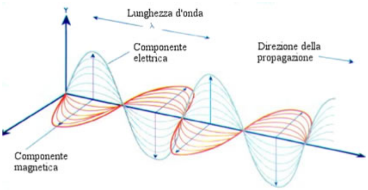


Segnale acustico

Onde radio (sono onde elettromagnetiche)



Segnali in fibre ottiche



Onda elettromagnetica

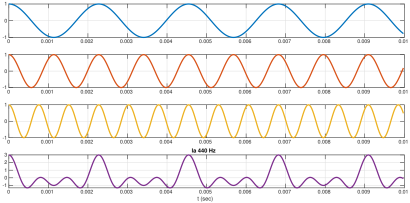
Questi segnali, se sono periodici, possono essere rappresentati mediante seni e coseni, o meglio, mediante serie di Fourier:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

sono somme di infiniti termini in cui compare un'esponenziale complessa:

$$e^{ikt} = cos(kt) + i\sin(kt)$$

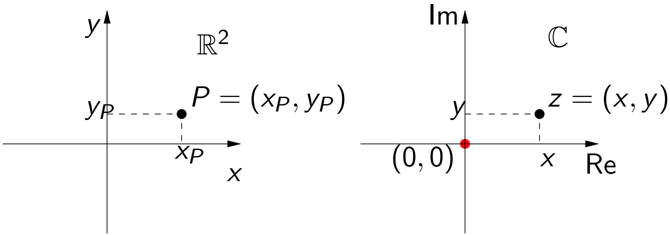
e "i" è detta unità immaginaria ed è un numero complesso.



I numeri complessi non servono per misurare grandezze fisiche, ma possono essere considerati uno strumento matematico che in tante situazioni ci aiuta a svolgere i conti in maniera più "semplice".

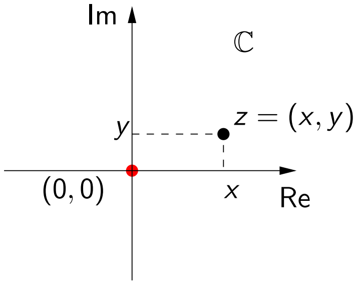
Numeri Complessi

Un numero complesso z è una coppia ordinata (x, y) di numeri reali x e y.
L'insieme dei numeri complessi è denotato con $\mathbb{C}$ e può essere identificato con il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.



La coppia $(0, 0)$ è lo zero di $\mathbb{C}$.
$x \in \mathbb{R}$ è detto parte reale di z e si scrive $x = Rez$
$y \in \mathbb{R}$ è detto parte immaginaria di z e si scrive $y = Imz$

L'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : \; z = (x, 0), \; x \in \mathbb{R}\}$, detto Asse reale può essere identificato con la retta dei numeri reali $\mathbb{R}$, per cui possiamo scrivere $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



L'insieme $B = \{z \in \mathbb{C} : \; z = (0, y), y \in \mathbb{R}\}$ è detto Asse immaginario e i numeri di B sono detti immaginari puri.

Somma di numeri complessi

Dati $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, la loro **somma** è ancora un numero complesso $z = (x, y)$:

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & + & z_2 & = & z \\ (x_1, y_1) & + & (x_2, y_2) & = & (\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y}) \end{array}$$

Esempi:

$z_1 = (2, -2),\ z_2 = (3, 1) \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (5, -1)$

$z_1 = (-3, 0),\ z_2 = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (-3, 1)$

Più in generale: $\boxed{(x, 0) + (0, y) = (x, y)}$

Prodotto di numeri complessi

Dati $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, il loro prodotto è ancora un numero complesso $z = (x, y)$:

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & \cdot & z_2 & = & z \\ (x_1, y_1) & \cdot & (x_2, y_2) & = & (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{array}$$

Esempi:

$z_1 = (2, -2),\ z_2 = (3, 1) \quad \Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 = (8, -4)$

$z_1 = (0, 1),\ z_2 = (2, 0) \quad \Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 = (0, 2)$

Più in generale: $(0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$

Forma cartesiana di un numero complesso

Grazie a $(x,0)+(0,y)=(x,y)$ e $(0,1)\cdot(y,0)=(0,y)$ si ha:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)$$

- Identifichiamo il numero complesso $(x,0)$ con il numero reale x e $(y,0)$ con il numero reale y,
- definiamo $i=(0,1)$. i è detta unità immaginaria,

abbiamo:

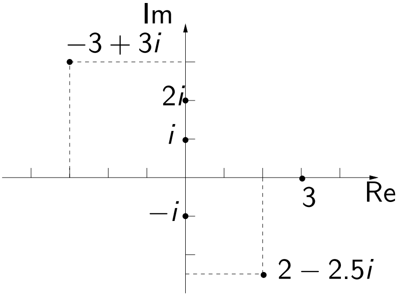
$$z=\underbrace{(x,0)}_{x}+\underbrace{(0,1)}_{i}\cdot\underbrace{(y,0)}_{y}$$

$$z=x+iy$$

è detta forma algebrica o cartesiana del numero complesso z.

Osserviamo che $i^2=ii=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$, ovvero $i\in\mathbb{C}$ è la soluzione dell'equazione $x^2=-1$ (o $x^2+1=0$), che non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.

Esempi



Tutti i numeri complessi con parte immaginaria nulla ($b = \text{Im}z = 0$) stanno sull'asse reale Re. $x = x + 0i$.
Tutti i numeri complessi con parte reale nulla ($x = \text{Re}z = 0$) stanno sull'asse immaginario Im. $iy = 0 + iy = yi$.

Operazioni in forma cartesiana

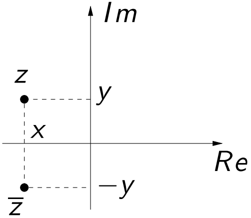
Somma: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
(sommo tra loro le parti reali e le parti immaginarie)
Es. $(3 + i2) + (-2 + i) = (3 - 2) + i(2 + 1) = 1 + i3 = 1 + 3i$

Sottrazione $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
(sottraggo tra loro le parti reali e le parti immaginarie)
Es. $(3 + i2) - (-2 + i) = (3 + 2) + i(2 - 1) = 5 + i$

Prodotto
$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + (-1)y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$
Es. $(3 + i2) \cdot (-2 + i) = (-6 - 2) + i(3 - 4) = -8 - i$

Complesso coniugato

Def. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, il numero complesso $\overline{z} = x - iy$ è detto **complesso coniugato** di z.

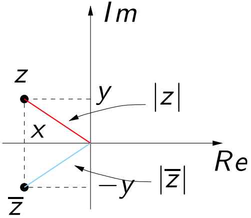


Modulo di un numero complesso

Def. $\forall z = \underbrace{Re(z)}_{x} + i\,\underbrace{Im(z)}_{y} \in \mathbb{C}$, il numero reale

$$|z| := \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è detto **modulo** di z e rappresenta la distanza del numero z dallo zero.

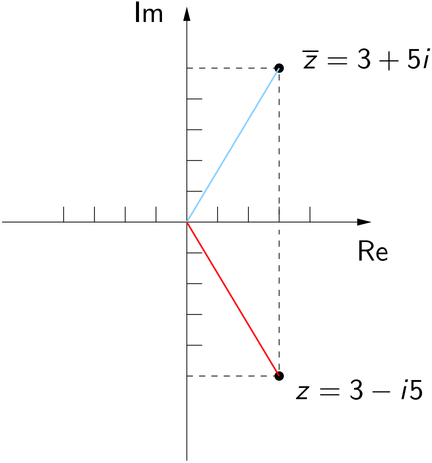


z ed il suo coniugato $\overline{z}$ hanno lo stesso modulo, ovvero:

$$|z| = |\overline{z}|.$$

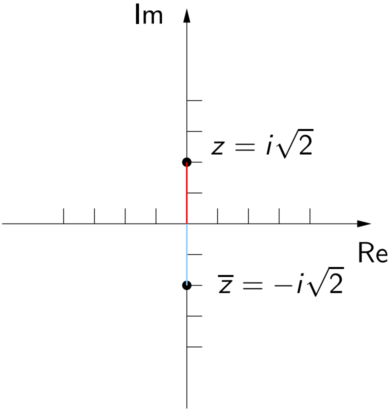
Esempi:

1) $z = 3 - i5$, allora $\overline{z} = 3 + i5$, e $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$



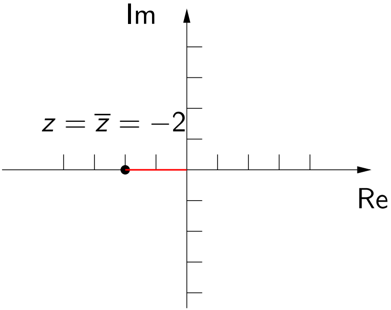
z immaginario puro

2) $z = i\sqrt{2}$, allora $\overline{z} = -i\sqrt{2}$, e $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{2}$



z reale

3) $z = -2$, allora $\overline{z} = -2$, e $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{(-2)^2} = 2$



Inverso di un numero complesso

La divisione tra due numeri è il prodotto del primo per l'inverso del secondo.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

Per fare la divisione tra due numeri complessi devo saper costruire l'inverso $\dfrac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 + i0$.

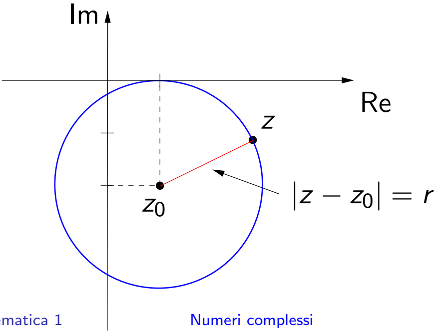
Proprietà. $\boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2}$

Allora:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

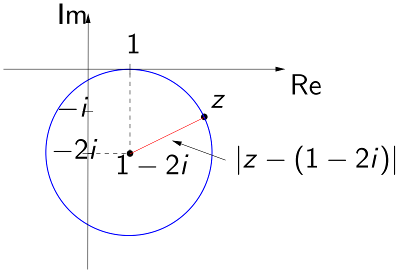
Es. Sia $z = 3 - 2i$. Abbiamo: $\dfrac{1}{3-2i} = \dfrac{3+2i}{13}$

Determinare il luogo geometrico $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}$

$|z|$ è la distanza di z da 0.
$|z - z_0|$ è la distanza di z da z_0. (Teorema di Pitagora)
Assegnato $z_0 \in \mathbb{C}$, ed assegnato $r \in \mathbb{R}^+$,
l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}$ è l'insieme dei punti del piano complesso che distano r da z_0 (circonferenza di centro z_0 e raggio r).



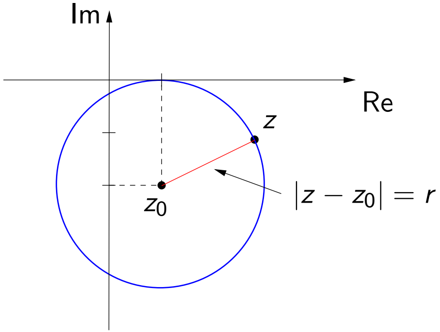
Esempio: $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - (1-2i)| = 2\}$
$|z-(1-2i)|$ è la distanza di z da $(1-2i)$.



A è l'insieme dei punti z la cui distanza da $(1-2i)$ è uguale a 2, ovvero è la circonferenza dei punti $z \in \mathbb{C}$ di centro $z_C = (1-2i)$ e raggio $r = 2$.

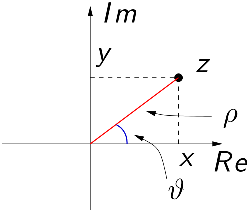
$A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq r\}$

Assegnato $z_0 \in \mathbb{C}$, ed assegnato $r \in \mathbb{R}^+$,
l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq r\}$ è l'insieme dei punti del piano complesso che distano da z_0 al piú r (cerchio di centro z_0 e raggio r, bordo incluso).



Forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}$ è univocamente individuato mediante 2 parametri: la sua parte reale $\text{Re}z = x$ e la sua parte immaginaria $\text{Im}z = y$.

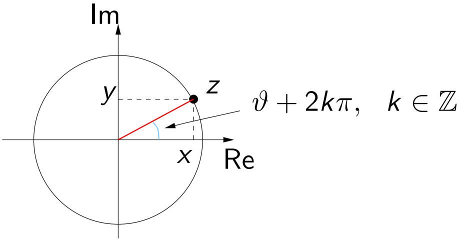


z può essere individuato univocamente anche da altri due parametri:

- $\rho = |z|$ modulo di z
- $\vartheta = \arg(z)$ argomento di z

ρ e ϑ sono dette anche coordinate polari del punto z nel piano complesso.

Se conosco ρ e θ, allora $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$.



Se conosco x e y, allora $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, mentre ϑ è l'angolo per cui:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\rho} \text{ e } \sin\vartheta = \frac{y}{\rho}$$

Esistono infiniti angoli che individuano lo stesso numero complesso z: $\vartheta,\ \vartheta + 2\pi,\ \vartheta + 4\pi,\ \vartheta - 2\pi,\ \ldots$, in genere $\vartheta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

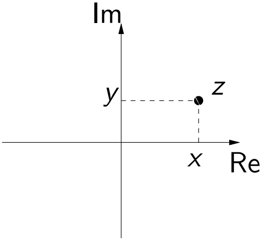
Si ha quindi: $z = x + iy = \rho \cos\vartheta + i\rho \sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$

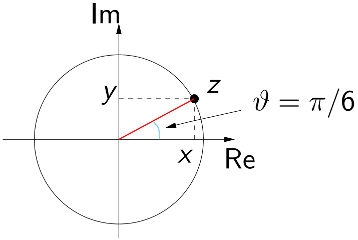
$$
\begin{aligned}
z &= x + iy && \text{forma algebrica} \\
&= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) && \text{forma trigonometrica}
\end{aligned}
$$

Esempi.

1) forma cartesiana $\to$ forma trigonometrica (o polare)

Dato $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. $\qquad \mathrm{Re}z = x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \mathrm{Im}z = y = \frac{1}{2}$.

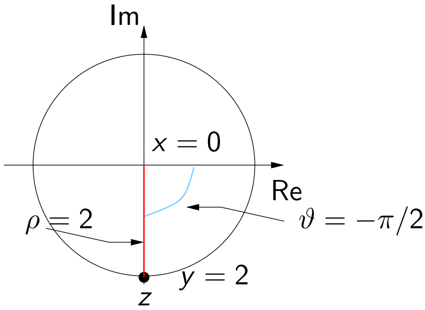




1. calcolo ρ: $\rho = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1$
2. calcolo $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$: $\cos\vartheta = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2}$
3. da cui $\vartheta = \frac{\pi}{6}$

2) Forma trigonometrica (o polare) $\rightarrow$ forma cartesiana

Sono noti $\rho = 2$ e $\vartheta = -\dfrac{\pi}{2}$.



$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2(0 - i) = -2i$$

Esponenziale complesso

$\forall z \in \mathbb{C}$ si vuole definire l'**esponenziale** di z, $e^z \in \mathbb{C}$, in modo da rispettare le proprietà classiche delle potenze.
e è il numero di Eulero (a volte noto come numero di Nepero)
$e \simeq 2.718....$
$\forall z = \underbrace{Rez}_{x} + i \underbrace{Imz}_{y} \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := e^{\mathrm{Re} z}(\cos(\mathrm{Im} z) + i \sin(\mathrm{Im} z)) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Esempi.

- $e^{(3-i)} = e^3(\cos(-1) + i \sin(-1)) = e^3(\cos(1) - i \sin(1))$
- $e^{-2} = e^{-2}(\cos(0) + i \sin(0))$
- $e^{2i\pi} = e^0(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = 1(1 + i0) = 1$
- $e^{i\vartheta} = e^0(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$

Formula di Eulero (1707 - 1783)

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \qquad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

Confrontando la forma trigonometrica di un numero complesso $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e la formula di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ si ha

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

detta forma esponenziale del numero complesso z.

Oss. Per $\vartheta = \pi$ la formula di Eulero diventa:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

Proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$

Teorema.

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$
2. $e^z \cdot e^{-z} = 1$
3. $|e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$
4. $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z}$
5. $(e^z)^n = e^{nz} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$
6. $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
7. $\overline{e^{i\vartheta}} = e^{-i\vartheta}$
8. $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Dimostrazione di 3. $|e^{i\vartheta}| = 1, \ \forall \vartheta \in \mathbb{R}$

$|e^{i\vartheta}| = |\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)| = \sqrt{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)} = 1.$

Poichè ϑ è un numero qualsiasi in $\mathbb{R}$, allora $|e^{iy}| = 1, \forall y \in \mathbb{R}$, $|e^{ix}| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, ...

Dimostrazione di 4. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}z}$

Per definizione di esponenziale di un numero complesso si ha: $e^z = e^{\mathrm{Re}z}(\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z))$, quindi $|e^z| =$ $|e^{\mathrm{Re}z}(\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z))| = |e^{\mathrm{Re}z}| \cdot |\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z)|$.

Comincio ad analizzare $|\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z))|$:

so che $y = \mathrm{Im}z \in \mathbb{R}$, quindi per la prop. 3 si ha

$|\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z))| = |\cos(y) + i\sin(y))| = |e^{iy}| = 1.$

Quindi $|e^z| = |e^{\mathrm{Re}z}| \cdot |\cos(\mathrm{Im}z) + i\sin(\mathrm{Im}z)| = e^{\mathrm{Re}z} \cdot 1 = e^{\mathrm{Re}z}$

cioè il modulo di e^z è $|e^z| = e^{\mathrm{Re}z}$

Dimostrazione di 6. $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Per la proprietà 1.: $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i}$

Quanto vale $e^{2k\pi i}$?

$e^{2k\pi i} = e^0(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 1(1+0) = 1$

Quindi $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.

Proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$

Dato $z = \text{Re}z + i\text{Im}z = x + iy$, l'esponenziale e^z è un numero complesso, lo chiamiamo ad esempio w. Dalla definizione di esponenziale complesso e dalla formula di Eulero abbiamo

$$w = e^z = e^{\text{Re}z}(\cos(\text{Im}z) + i\sin(\text{Im}z)) = e^{\text{Re}z}e^{i\text{Im}z} = \underbrace{e^x}_{\rho} e^{iy}$$

cioè l'esponenziale di z è un numero complesso w il cui modulo è $\rho = e^x$ (x è la parte reale di z) ed il cui argomento è y (y è la parte immaginaria di z).

Un numero complesso z può essere espresso in una delle tre seguenti forme, tutte equivalenti fra di loro:

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{forma cartesiana} \\ &= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) && \text{forma trigonometrica} \\ &= \rho e^{i\vartheta} && \text{forma esponenziale} \end{aligned}$$

A seconda del contesto in cui si lavora, si usa la forma piú adatta:

per somma e sottrazione: forma cartesiana

per prodotto, divisione e potenza: forma esponenziale.

Operazioni con la forma esponenziale

La forma esponenziale dei numeri complessi è molto comoda per svolgere prodotti, divisioni e potenze di numeri complessi.
Siano $z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$, si ha:

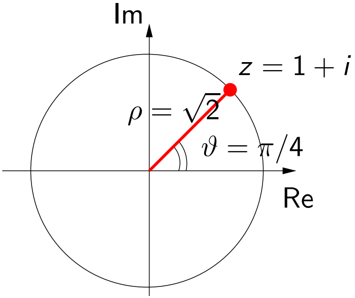
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$
- $(z_1)^n = \rho_1^n e^{in\vartheta_1}$
  $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, formula di *de Moivre*

Es. Calcolare $(1+i)^6$.

1. si trasforma $z = 1 + i$ in forma trigonometrica e poi esponenziale
2. si calcola z^6, utilizzando la forma esponenziale
3. si trasforma il risultato nella forma cartesiana.

Passo 1.: $(z = x + iy = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta})$

$$\begin{aligned} z &= (1+i) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$



Passo 2.:

$$z^6 = (1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{3}{2}\pi} = 8\ e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

Passo 3.:

$$8\ e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8i.$$

Quindi $(1+i)^6 = -8i$

Radice n-sima di un numero complesso

Dato $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, vogliamo calcolare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ per cui vale

$$z^n = w$$

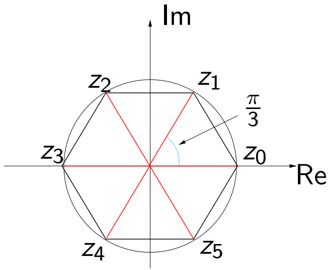
Def. Diciamo che $z \in \mathbb{C}$ è **radice** n-**sima** di $w \in \mathbb{C}$ se vale $z^n = w$.

N.B. Non utilizziamo il simbolo $\sqrt{\ }$ per rappresentare le radici complesse, perchè il risultato non è univoco.
Se $x \in \mathbb{R}$, allora la radice $n-$sima di x è un unico numero reale e il simbolo $\sqrt[n]{x}$ individua un unico numero (avevamo costruito $\sqrt[n]{\ }$ come la funzione inversa della potenza).
Se $z \in \mathbb{C}$, allora le radici $n-$sime di z sono n e non possiamo utilizzare un solo simbolo per rappresentarle tutte.

Teorema. Ogni numero complesso non nullo w ha esattamente n radici complesse n-sime distinte, ovvero l'equazione $z^n = w$ ha n soluzioni distinte complesse. Inoltre, se $w = \rho e^{i\vartheta}$, le n radici n-sime di w hanno la forma: $z_k = r\ e^{i\varphi_k}$,

$$\text{dove } r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1.$$

Osservazione. Le radici n-sime di w sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio r. Ogni radice è ottenuta dalla precedente incrementando l'argomento φ_k di un angolo $2\pi/n$.



Esercizio d'esempio

Risolvere l'equazione $z^3 + 8 = 0$ in $\mathbb{C}$.

(Equivale a calcolare le radici terze di $w = -8$, cioè calcolare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = -8$.)

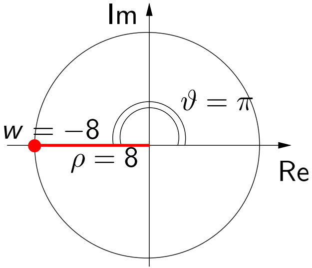
N.B. L'equazione $x^3 + 8 = 0$ in $\mathbb{R}$ ha una sola soluzione reale: $x = -2$.
L'equazione $z^3 + 8 = 0$ in $\mathbb{C}$ ha 3 soluzioni distinte complesse.

Procedimento:

1. Si trasforma $w = -8$ in forma esponenziale
2. Si calcolano le radici complesse z_0, z_1, ..., z_{n-1}
3. Si trasformano in forma algebrica gli z_k trovati.

Passo 1.: $(w = x + iy = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta})$

$$\begin{aligned} w &= -8 = -8 + 0i \\ &= 8(-1 + 0i) \\ &= 8\ (\cos\pi + i\sin\pi) = 8e^{i\pi} \end{aligned}$$



Quindi:

$\rho = 8,\ \vartheta = \pi$

Passo 2.:

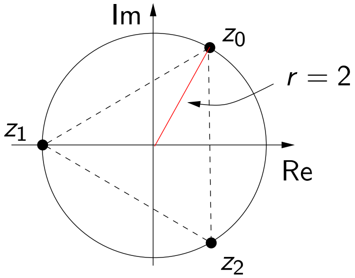
Calcolo $r = \sqrt[n]{\rho}$ (ricordo che $\rho \in \mathbb{R}^+$) e gli angoli $\varphi_k = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ per $k = 0, \dots, n-1$:

$r = \sqrt[3]{8} = 2$ e

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n} = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi_1 = \frac{\vartheta + 2\pi}{n} = \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi,$$

$$\varphi_2 = \frac{\vartheta + 4\pi}{n} = \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$



Quindi: $z_0 = 2e^{i\pi/3}$, $z_1 = 2e^{i\pi}$, $z_2 = 2e^{i5\pi/3}$

Passo 3.:

$z_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i$,
$z_1 = 2e^{i\pi} = -2$,
$z_2 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - \sqrt{3}i$

Esercizio. Calcolare le radici complesse **seste** dell'unità.
Si ha $w = 1$, $n = 6$. Devo calcolare $n = 6$ numeri complessi $z_0, z_1, ..., z_5$ della forma

$$z_k = r\ e^{i\varphi_k}, \text{ con } r = \sqrt[6]{\rho} \text{ e } \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{6}, \text{ con } k = 0, 1, ..., 5.$$

Passo 1. Individuo ρ e ϑ:
$w = 1 = \rho e^{i\cdot 0}$, quindi $\rho = 1$ e $\vartheta = 0$
Passo 2. Calcolo: $r = \sqrt[6]{\rho} = 1$
Passo3. Calcolo gli angoli φ_k, con $k = 0, ..., 5$

$$\varphi_0 = \frac{0 + 0 \cdot 2\pi}{6} = 0, \qquad \varphi_1 = \frac{0 + 1 \cdot 2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi_2 = \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \varphi_3 = \frac{0 + 3 \cdot 2\pi}{6} = \pi,$$

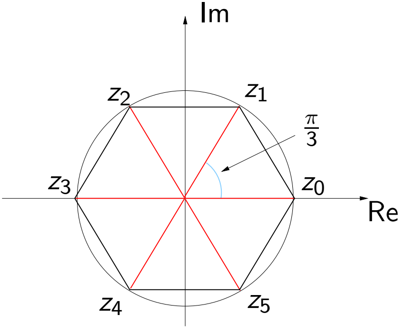
$$\varphi_4 = \frac{0 + 4 \cdot 2\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}, \qquad \varphi_5 = \frac{0 + 5 \cdot 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}.$$

Le radici seste dell'unità sono:

$$z_0 = e^{i\varphi_0} = e^{i0} = 1, \qquad z_1 = e^{i\varphi_1} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\varphi_2} = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3 = e^{i\varphi_3} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_4 = e^{i\varphi_4} = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_5 = e^{i\varphi_5} = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Polinomi in campo complesso

Def. Una funzione $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un **polinomio** a variabile complessa z se si può scrivere come

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono numeri complessi assegnati detti **coefficienti** del polinomio.
Se $a_n \neq 0$, allora si dice che il polinomio è di grado n.
Es. $p(z) = (3+i)z^3 - iz^2 + 2$.

Questo polinomio ha grado $n = 3$ e i coefficienti sono:
$a_3 = 3 + i$, $a_2 = -i$, $a_1 = 0$, $a_0 = 2$

Def. Si chiama **radice** di p ogni numero complesso w tale che $p(w) = 0$.

Proposizione. (Principio di identità dei polinomi)
Due polinomi $p(z)$ e $q(z)$ sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.

Es.

$$\begin{aligned} p(z) = &\quad (3+i)z^3 \quad -i\,z^2 \quad +2 \\ q(z) = &\quad (3+i)z^3 \quad -\ z^2 \quad +2 \end{aligned}$$

non sono uguali.
Infatti $a_2 = -i$ per p, mentre $a_2 = -1$ per q.

Teorema (fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio $p(z)$ di grado $n \geq 1$ avente coefficienti complessi ammette esattamente n soluzioni in campo complesso, ognuna contata con la sua molteplicità.

Esempio. $p(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$.

$z_1 = i$, $z_2 = -i$ sono 2 radici distinte semplici (ovvero con molteplicità 1);

Esempio.
$p(z) = z^5 + 2z^3 = z^3(z^2 + 2) = z \cdot z \cdot z \cdot (z - i\sqrt{2}) \cdot (z + i\sqrt{2})$.

Le radici sono:
$z_1 = 0$ con molteplicità 3,
$z_2 = i\sqrt{2}$ semplice,
$z_3 = -i\sqrt{2}$ semplice.
La somma di tutte le molteplicità è 5 (pari al grado dell'equazione).

Proposizione. Si consideri un polinomio $p(z)$ con coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$. Se w è una radice (non reale) allora anche $\overline{w}$ (complesso coniugato) è una radice, con la stessa molteplicità di w.
In particolare, se il grado del polinomio è dispari, vi è almeno una radice reale.

Attenzione:
$z^3 = |z|^4$ (ovvero $z^3 - |z|^4 = 0$) NON è una equazione di tipo polinomiale (in un polinomio compaiono solo potenze di z, qui invece c'è anche un modulo).

Proprietà di modulo e complesso coniugato

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\alpha \cdot z| = |\alpha| \cdot |z|, \quad Re(\alpha z) = \alpha Re(z), \quad Im(\alpha z) = \alpha Im(z)$$

$$\overline{(\alpha z)} = \alpha \overline{z}$$

$\forall z_1,\ z_2,\ z \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$$

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\mathrm{Re}z$$

$$z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\mathrm{Im}z$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Infatti: prendo $z = x + iy$, allora $\overline{z} = x - iy$ e $z = \overline{z}$ se e solo se $x = x$ (sempre vero) e $y = -y$ (vero se e solo se $y = \mathrm{Im}z = 0$), ovvero $z \in \mathbb{R}$.

Riferimento bibliografico

Canuto-Tabacco, edizione Pearson: cap. 3

Canuto-Tabacco, edizione Springer: sez. 1.5, pag. 22-24 e Cap. 8.

Esercizi:

- dal libro Canuto-Tabacco.
- esercizi nei temi d'esame

Esercizio

Risolvere l'equazione $z^2 = |z|^4$, con $z \in \mathbb{C}$.