

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 3 dicembre 2025

1. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\sqrt{x} + xe^x - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{3x} dx$.
2. Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin^2 x dx$.
3. Calcolare l'integrale indefinito $\int e^{-2x} \sin x dx$.
4. Calcolare l'integrale indefinito $\int 2xe^{x^2} dx$.
5. Calcolare l'integrale indefinito $\int \tan x dx$.
6. Calcolare l'integrale indefinito $\int e^x(e^x - 2)^3 dx$.
7. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 + x^3}} dx$.
8. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x - 10}{x^2 - 4} dx$.
9. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x + 1}{x^3 + 4x^2} dx$.
10. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x^2 - 4}{x^3 + 2x} dx$.
11. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} dx$.
12. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11}{x^2 - 5x + 6} dx$.

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\sqrt{x} + xe^x - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{3x} dx$.

Cerchiamo l'insieme di tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + xe^x - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{3x} \text{ in un qualunque intervallo}$$

contenuto in $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} + xe^x - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{3x} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{3x} + \frac{xe^x}{3x} - \frac{1}{3x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) dx \end{aligned}$$

linearità

$$\begin{aligned} &\rightarrow = \frac{1}{3} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{3} \int e^x dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} \log|x| + \frac{1}{3} \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} \log x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} \log x + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int \sin^2 x \, dx$

Lo calcoliamo integrando per parti:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & f(x) = -\cos x \\ g(x) = \sin x & g'(x) = \cos x \end{array}$$

$$= -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cdot \cos x \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}}$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

linearità $\rightarrow$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Abbiamo ricevuto

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{1}{2} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio: calcolare integrando per parti $\int \cos^2 x \, dx$

Alternativa possibile: calcolare $\int \sin^2 x \, dx$ e $\int \cos^2 x \, dx$
applicando le formule di bisezione

Calcolare $\int e^{-2x} \sin x \, dx$

Integriamo per parti:

$$\int \underbrace{e^{-2x}}_{g(x)} \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \, dx = \underbrace{(-\cos x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{g(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-2e^{-2x})}_{g'(x)} \, dx = \textcircled{*}$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & f(x) = -\cos x \\ g(x) = e^{-2x} & g'(x) = -2e^{-2x} \end{array}$$

$$\textcircled{*} = -e^{-2x} \cos x - \int 2e^{-2x} \cos x \, dx =$$

$$= -e^{-2x} \cos x - 2 \int \underbrace{e^{-2x}}_{g(x)} \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \, dx =$$

$$= -e^{-2x} \cos x - 2 \left[e^{-2x} \sin x - \int (-2e^{-2x}) \sin x \, dx \right] =$$

$$= -e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x - 4 \int e^{-2x} \sin x \, dx$$

Abbiamo ricevuto

$$\int e^{-2x} \sin x \, dx = -e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x - 4 \int e^{-2x} \sin x \, dx$$

$$5 \int e^{-2x} \sin x \, dx = -e^{-2x} \cos x - 2e^{-2x} \sin x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{-2x} \sin x \, dx = -\frac{e^{-2x}}{5} (\cos x + 2 \sin x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int 2xe^{x^2} dx$

Integriamo per sostituzione

$$y = \varphi(x) = x^2 \quad dy = \varphi'(x) dx = 2x dx$$

$$\int \underbrace{2xe^{x^2}}_{dy} dx = \int e^y dy = e^y + c = e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int \tan x dx$

Cerchiamo tutte le primitive di $f(x) = \tan x$ in un qualunque intervallo contenuto in

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = (\Delta)$$

$$y = \varphi(x) = \cos x \quad dy = \varphi'(x) dx = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned} (\Delta) &= - \int \frac{\underbrace{\sin x dx}_{dy}}{\cos x} = \\ &= - \int \frac{1}{y} dy = \end{aligned}$$

$$= -\log|y| + c$$

$$= -\log|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Attenzione! $t = \sin x$ $dt = \boxed{\cos x \, dx}$

$\int \boxed{\frac{\sin x \, dx}{\cos x}}$ La sostituzione non aiuta...

Calcolare $\int e^x (e^x - 2)^3 dx$

$$y = \varphi(x) = e^x - 2$$

$$dy = \varphi'(x) dx = e^x dx$$

$$\int \underbrace{e^x (e^x - 2)^3}_{dy} dx = \int y^3 dy =$$

$$= \frac{1}{4} y^4 + c$$

$$= \frac{1}{4} (e^x - 2)^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Alternativa: pensare alle regole di derivazione

$$\frac{d}{dx} [\varphi(x)]^\alpha = \alpha \cdot [\varphi(x)]^{\alpha-1} \cdot \varphi'(x) \quad \begin{array}{l} \text{con } \varphi \text{ derivabile} \\ \text{e positiva,} \\ \text{e } \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se α è naturale, non serve φ positiva

$$\int \underbrace{e^x}_{\varphi'(x)} \underbrace{(e^x - 2)^3}_{\varphi(x)} dx = \frac{1}{4} (e^x - 2)^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx = \int x^2 (4+x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = (\square)$$

$$y = \varphi(x) = 4+x^3$$

$$dy = \varphi'(x) dx = 3x^2 dx$$

$$(\square) = \frac{1}{3} \int \underbrace{3x^2 (4+x^3)^{-\frac{1}{2}} dx}_{dy} =$$

$$= \frac{1}{3} \int y^{-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 y^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{4+x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Sono funzioni razionali le funzioni della forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } P(x), Q(x) \text{ polinomi a coefficienti}$$

reali e $Q(x)$ non identicamente nullo

Chiamiamo n il grado di $P(x)$ e m il grado di $Q(x)$.

Nel seguito supponiamo $n \geq 0$.

• Consideriamo il problema di integrare funzioni razionali con $n < m$

(1) $Q(x)$ si può scrivere come prodotto di fattori di 1° grado e fattori di 2° grado irriducibili su $\mathbb{R}$ (cioè con $\Delta < 0$)

(2) $f(x)$ si può scrivere come somma di fratti semplici, cioè frazioni che hanno al denominatore i fattori irriducibili di $Q(x)$ e le loro potenze con esponente $\leq$ molteplicità dei fattori, e hanno al numeratore:

- un numero reale se il fattore irriducibile al den. è di 1° grado
- un polinomio di 1° grado se il fattore irriducibile al den. è di 2° grado.

Calcolare $\int \frac{x-10}{x^2-4} dx$

$$P(x) = x-10 \quad n=1$$

$$Q(x) = x^2-4 \quad m=2$$

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$ si scompone come prodotto di due fattori di 1° grado con molteplicità 1

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$\frac{x-10}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$x-10 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x-10 = (A+B)x + 2A-2B$$

I due polinomi coincidono $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ se e solo se i loro coefficienti sono ordinatamente uguali

$$\begin{cases} 1 = A+B & \leftarrow \text{coefficienti di } x \\ -10 = 2A-2B & \leftarrow \text{termini costanti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ A-B = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A = -4 \\ 2B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x-10}{x^2-4} dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x+2} \right) dx =$$

linearità

$$= -2 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= -2 \log |x-2| + 3 \cdot \log |x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int \frac{2x+1}{x^3+4x^2} dx$

$$P(x) = 2x+1, \quad n=1$$

$$Q(x) = x^3+4x^2, \quad m=3$$

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

Nella scomposizione,
il fattore x ha molteplicità 2
il fattore $(x+4)$ ha molteplicità 1

Cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$

$$\frac{2x+1}{x^3+4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$2x+1 = A x(x+4) + B(x+4) + C x^2$$

$$2x+1 = A x^2 + 4A x + B x + 4B + C x^2$$

$$0x^2 + 2x + 1 = (A+C)x^2 + (4A+B)x + 4B$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+B=2 \\ 4B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A \\ 4A=2-\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{7}{16} \\ A=\frac{7}{16} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3+4x^2} dx = \int \left(\frac{7/16}{x} + \frac{1/4}{x^2} + \frac{-7/16}{x+4} \right) dx$$

$$= \frac{7}{16} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int x^{-2} dx - \frac{7}{16} \int \frac{1}{x+4} dx =$$

$$= \frac{7}{16} \log|x| + \frac{1}{4} \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{7}{16} \log|x+4| + c$$

$$= \frac{7}{16} \log \left| \frac{x}{x+4} \right| - \frac{1}{4x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int \frac{3x^2-4}{x^3+2x} dx$

$P(x) = 3x^2-4, n=2$
 $Q(x) = x^3+2x, m=3$

$$x^3+2x = x(x^2+2)$$

Nella scomposizione,
 • il fattore x è di 1° grado con molteplicità 1
 • il fattore (x^2+2) è di 2° grado irriducibile con molt. 1

Cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\frac{3x^2-4}{x^3+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$3x^2-4 = A(x^2+2) + (Bx+C) \cdot x$$

$$3x^2-4 = (A+B)x^2 + Cx + 2A$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ C=0 \\ 2A=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=3-A \\ C=0 \\ A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=5 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x^2-4}{x^3+2x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{5x}{x^2+2} \right) dx =$$

$$= -2 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \frac{x}{x^2+2} dx$$

$$\varphi'(x) = 2x$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c$$

$$I = \int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\overset{\varphi'(x)}{2x}}{\underset{\varphi(x)}{x^2+2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log|x^2+2| + c =$$

perché $x^2+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2) + c$$

$$\int \frac{3x^2-4}{x^3+2x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \frac{x}{x^2+2} dx =$$

$$= -2 \log|x| + \frac{5}{2} \log(x^2+2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

• Integrazione di funz. razionali nel caso $n \geq m$

Calcolare $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2+1} dx$

$$P(x) = x^2+3x+1, \quad n=2$$

$$Q(x) = x^2+1, \quad m=2$$

Numeratore e denominatore hanno lo stesso grado

Riscriviamo il numeratore come denominatore + altro addendo

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) + 3x}{x^2+1} = 1 + \frac{3x}{x^2+1}$$

← grado 1
← grado 2
e $\Delta < 0$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} dx = \int 1 dx + \int \frac{3x}{x^2 + 1} dx =$$

$$= x + \frac{3}{2} \int \frac{\underbrace{2x}_{=\varphi'(x)}}{\underbrace{x^2 + 1}_{=\varphi(x)}} dx =$$

$$= x + \frac{3}{2} \log(x^2 + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolare $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11}{x^2 - 5x + 6} dx$

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11$ ha grado $n = 4$

$Q(x) = x^2 - 5x + 6$ ha grado $m = 2$

Ci riconduciamo al caso precedente facendo la divisione, cioè trovando il quoziente $D(x)$ e il resto $R(x)$ tali che

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} R(x) \text{ ha grado} \\ \text{minore di } Q(x) \\ \text{oppure è identicamente} \\ \text{nullo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11 & x^2 - 5x + 6 \\ -x^4 + 5x^3 - 6x^2 & \\ \hline 2x^2 - 9x + 11 & \\ -2x^2 + 10x - 12 & \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 9x + 11}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{\overset{\text{numeratore}}{(x^2 - 5x + 6)} \overset{\text{denominatore}}{(x^2 + 2)} + \overset{\text{quoziente}}{x} - \overset{\text{resto}}{1}}{x^2 - 5x + 6} \\
 &= x^2 + 2 + \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}
 \end{aligned}$$

Ci siamo ricondotti a calcolare

$$\int \left(x^2 + 2 + \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} \right) dx = \int x^2 dx + \int 2 dx + \int \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Cerco $A, B \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

$$\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

$$x - 1 = A(x - 3) + B(x - 2)$$

$$x - 1 = (A + B)x - 3A - 2B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ 3A + 2 - 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x-3} \right) dx = \\
 &= - \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{x-3} dx = \\
 &= -\log|x-2| + 2\log|x-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Concluendo

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4-5x^3+8x^2-9x+11}{x^2-5x+6} dx &= \int x^2 dx + \int 2 dx + I \\
 &= \frac{x^3}{3} + 2x - \log|x-2| + 2\log|x-3| + c, \\
 &\quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$