Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 26 novembre 2025

1. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right)$ e il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

2. (Prova d'esame 3 settembre 2020) Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{\frac{5}{4}}$.

3. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+\arctan n}{2n^3+\log(n^5)}$.

4. Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+7)^5}{(n+1)^n}$ converge semplicemente o assolutamente.

5. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n-7)}{n^2+7}$ e il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(n-7)-\frac{1}{2}}{\sqrt{n^4-7}}$.

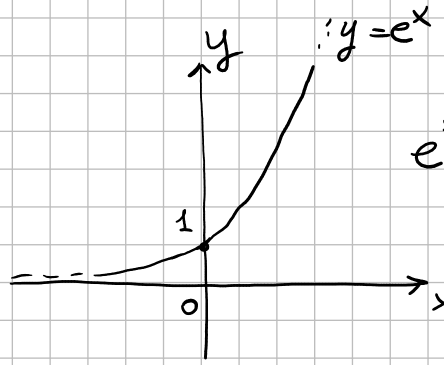
6. (Variante della prova d'esame 4 settembre 2024) Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$ converge semplicemente o assolutamente.

7. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n\sqrt[3]{n}\left[e^{\frac{1}{n+1}}-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-1\right]$.

8. (Variante della prova d'esame 10 aprile 2017) Studiare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}.$$

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right)$ e il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right)$$



$e^x > 1 \quad \forall x > 0$

$$a_n = e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} - 1 \geq 0 \quad \forall n \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie a termini positivi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right) = e^0 - 1 = 0$$

(è soddisfatta la condizione necessaria per la conv. della serie)

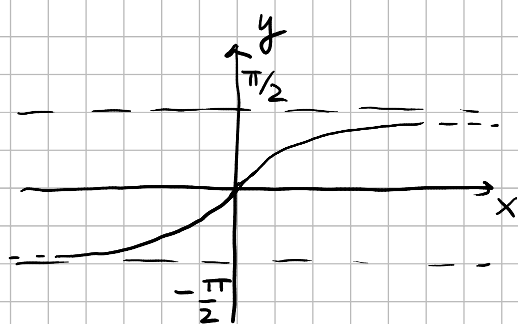
$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

$$e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ è una serie armonica generalizzata con $\lambda = \frac{3}{2} > 1$, quindi la serie converge.

Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}-1\right)$ converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right)$$



- $a_n = \arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right) \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

$\arctan x > 0 \quad \forall x > 0$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right) = \arctan 0 = 0$

- $\arctan x \sim x$ per $x \to 0$

$\arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{5}{\sqrt[3]{n}} = \frac{5}{n^{1/3}}$ per $n \to +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ è una serie armonica generalizzata di parametro $\lambda = \frac{1}{3} \leq 1$, quindi la serie diverge positivamente.

Per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{5}{\sqrt[3]{n}}\right)$ diverge positivamente.

(03/09/2020) Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}}$

- $a_n = \sqrt[n]{\frac{5}{4}} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è a termini positivi

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^{\xrightarrow{1/n} 0} = 1$

Non è soddisfatta la condiz. nec. per la convergenza

- Dato che si tratta di una serie a termini positivi, la serie diverge positivamente.

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+\arctan n}{2n^3+\log(n^5)}$$

$\arctan x > 0 \ \forall x > 0$
$\log x > 0 \ \forall x > 1$

$$a_n = \frac{n^2+\arctan n}{2n^3+\log(n^5)} \geq 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$a_n = \frac{n^2+\overset{\to \frac{\pi}{2}}{\arctan n}}{2n^3+5\log n} \sim \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$n^2+\arctan n \sim n^2$ per $n \to +\infty$

$2n^3+5\cdot\log n \sim 2n^3$ per $n \to +\infty$ (confronto di infiniti)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è una serie armonica, che diverge positiv.

Per il criterio del confronto, anche la serie di partenza diverge positivamente.

Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+7)^5}{(n+1)^n}$

converge semplicemente o assolutamente.

$$a_n = (-1)^n \frac{(n+7)^5}{(n+1)^n} \quad \forall n \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Per definizione, converge assolutamente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ diverge} \end{cases}$

$$|a_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{(n+7)^5}{(n+1)^n} \right| = |(-1)^n| \cdot \left| \frac{(n+7)^5}{(n+1)^n} \right| = \frac{(n+7)^5}{(n+1)^n}$$

Vogliamo determinare se converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+7)^5}{(n+1)^n}$$

- $|a_n| > 0 \quad \forall n \geq 1$
- Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+8)^5}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n+7)^5} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+8)^5}{(n+7)^5} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n+2)^n \cdot (n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+8}{n+7}\right)^5 \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+8}{n+7}\right)^5 \cdot \left(\frac{(n+2)-1}{n+2}\right)^n \cdot \frac{1}{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{\overset{\sim n}{n+8}}{\underset{\sim n}{n+7}}\right)^5}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0} = 0$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1$, per il criterio del rapporto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, cioè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente.

Determinare il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n-7)}{n^2+7}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n-7)}{n^2+7}$ è una serie con termini di segno qualunque

$-1 \leq \sin(n-7) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ quindi

$|\sin(n-7)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\sin(n-7)}{n^2+7}$$

Cerchiamo di capire se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge

$$|a_n| = \frac{|\sin(n-7)|}{|n^2+7|} = \frac{|\sin(n-7)|}{n^2+7} \leq \frac{1}{n^2+7} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è una serie armonica generalizzata con $\lambda = 2 > 1$, quindi converge

Per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Per il criterio della convergenza assoluta, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n-7)}{n^2+7}$ converge.

Variante.
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n-7)-\frac{1}{2}}{\sqrt{n^4-7}}$$

$$a_n = \frac{\sin(n-7)-\frac{1}{2}}{\sqrt{n^4-7}} \quad \text{hanno segno qualunque}$$

$$-1 \leq \sin(n-7) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{3}{2} \leq \sin(n-7)-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{quindi}$$

$$\left|\sin(n-7)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|a_n| = \frac{\left|\sin(n-7)-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{n^4-7}} \leq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^4-7}} \sim \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^4}}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge (serie armonica generalizz. } \lambda=2)$$

Per il criterio del confronto asintotico,
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^4-7}} \quad \text{converge,}$$

dunque $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|$ converge per il crit. del confronto,

cioè la serie di partenza converge assolutamente.

(Variante 04/09/2024)

Determinare se $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}$ converge semplicemente o assolutamente.

$$a_n = (-1)^n \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)} \quad \forall\, n \geq 3$$

$$|a_n| = \sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)} \qquad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ per } x\to 0$$

$\frac{3}{n} \xrightarrow{\text{per } n\to+\infty} 0$

$$|a_n| \sim \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, quindi, per il criterio del confronto asintotico, $\sum_{n=3}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

La serie $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$ <u>non</u> converge assolutamente.

$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$ è una serie a termini di segno alterno

$$a_n = (-1)^n \underbrace{\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}}_{= b_n}$$

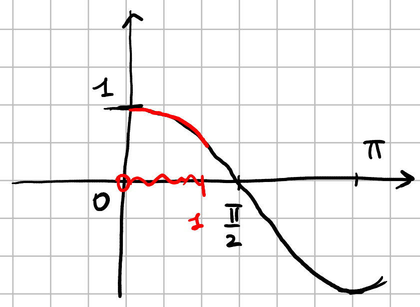
- $b_n \geq 0 \quad \forall\, n\geq 3$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{3}{n}\right) \leq 1 \quad \forall\, n \geq 3$$

$$1-\cos\left(\frac{3}{n}\right) \geq 0 \quad \forall\, n \geq 3$$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1-\underbrace{\cos\left(\frac{3}{n}\right)}_{\downarrow \atop \cos 0}} = 0$

• $b_{n+1} \overset{?}{\leq} b_n \quad \forall\, n \geq 1$



Se $n \geq 3$, allora $0 < \frac{3}{n} \leq 1$

$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{n} \quad \forall\, n \geq 3$$

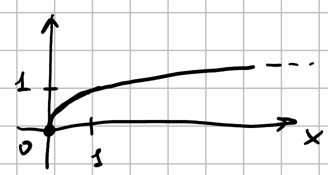
$$\cos\left(\frac{3}{n+1}\right) \geq \cos\left(\frac{3}{n}\right) \quad \forall\, n \geq 3$$ perché $y = \cos x$ è decrescente in $(0, 1]$

$$-\cos\left(\frac{3}{n+1}\right) \leq -\cos\left(\frac{3}{n}\right) \quad \forall n \geq 3$$ (moltiplicando entrambi i membri per -1)

$$1 - \cos\left(\frac{3}{n+1}\right) \leq 1 - \cos\left(\frac{3}{n}\right) \quad \forall n \geq 3$$ (aggiungendo 1 a entrambi i membri)

$$\underbrace{\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)}}_{\parallel \atop b_{n+1}} \leq \underbrace{\sqrt{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}}_{b_n} \quad \forall\, n \geq 3$$

$y = \sqrt{x}$ è crescente in $[0, +\infty)$



La succ. b_n è decrescente

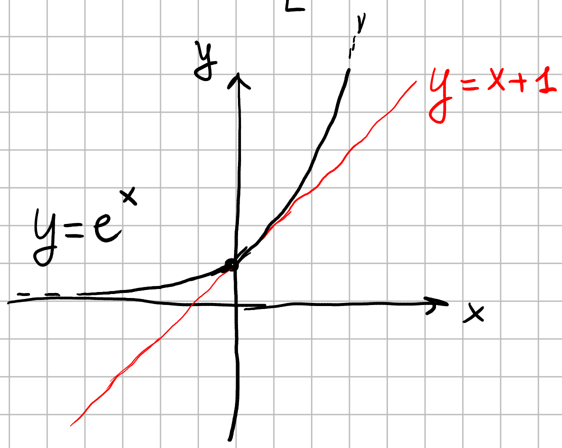
Sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$ converge.

Dato che non converge assolutamente, la serie converge semplicemente.

Determinare il carattere della serie

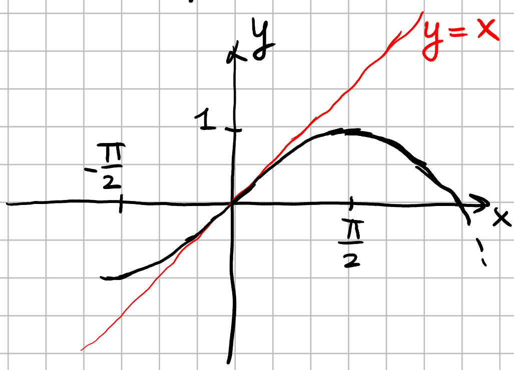
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\sqrt[3]{n}\left[e^{\frac{1}{n+1}}-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-1\right]$$

$$a_n = n\sqrt[3]{n}\left[e^{\frac{1}{n+1}}-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-1\right] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$



$e^x \geq x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, cioè

$e^x - 1 \geq x \quad \forall x\in\mathbb{R}$



$x \geq \sin x \quad \forall x\in[0,+\infty)$, cioè

$x - \sin x \geq 0 \quad \forall x\in[0,+\infty)$

$$\underbrace{e^{\frac{1}{n+1}}-1}_{\geq \frac{1}{n+1}}-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$a_n \geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, quindi la serie è a t.p.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4) \quad \text{per } x\to 0$$

$$e^{\frac{1}{n+1}} - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - 1 = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$- \cancel{\frac{1}{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$a_n \sim n\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2} \sim \cancel{n}\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{2n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{1-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2/3}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ è una serie armonica generalizzata con $\lambda = \frac{2}{3} < 1$, quindi diverge positivamente.

Per il criterio del confronto asintotico, la serie data diverge.

(Variante 10/07/2017) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}$

$$a_n = \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} \quad \forall n \geq 1$$

se $n \geq 1$, allora $7^n \geq 7$ quindi $1+7^n \geq 8$ e $\log(1+7^n) > 0$

$$|a_n| = \frac{|7-\alpha|^n}{\log(1+7^n)}$$

Determiniamo il carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{|7-\alpha|^{n+1}}^{|7-\alpha|}}{\log(1+7^{n+1})} \cdot \frac{\log(1+7^n)}{\cancel{|7-\alpha|^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |7-\alpha| \cdot \frac{\log(1+7^n)}{\log(1+7^{n+1})}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1+7^n \sim 7^n \\ 1+7^{n+1} \sim 7^{n+1} \end{array} \text{ per } n\to+\infty}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |7-\alpha| \cdot \frac{\log(7^n)}{\log(7^{n+1})} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |7-\alpha| \cdot \underbrace{\frac{n \cdot \cancel{\log(7)}}{(n+1) \cdot \cancel{\log(7)}}}_{\to 1} = |7-\alpha|$$

Se $|7-\alpha| < 1$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge

Se $|7-\alpha| > 1$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge

Se $|7-\alpha|=1$, non si conclude nulla dal criterio del rapporto

- $|7-\alpha|<1 \iff |\alpha-7|<1$

$$\iff -1<\alpha-7<1$$
$$\iff 6<\alpha<8$$

Se $\alpha \in (6,8)$, allora la serie di partenza converge assolutamente

- Caso $\alpha = 6$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\log(1+7^n)}}_{=a_n}$$ è una serie a t.p.

$$a_n = \frac{1}{\log(1+7^n)} \sim \frac{1}{\log(7^n)} = \frac{1}{n\cdot\log(7)} = \frac{1}{\log(7)}\cdot\frac{1}{n} \quad \text{per } n\to+\infty$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(1+7^n)}$ diverge (positiv.)

- Caso $\alpha = 8$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$$ è una serie a termini di segno alterno

$$b_n = \frac{1}{\log(1+7^n)}$$

- $b_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ (vedi sopra)
- $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(1+7^n)} = 0$, $\log(1+7^n) \to +\infty$
- $b_{n+1} \overset{?}{\leq} b_n \quad \forall n \geq 1$

$$7^{n+1} \geq 7^n \quad \forall n \geq 1 \quad \text{perché } 7^{n+1} = 7 \cdot 7^n$$

$$1+7^{n+1} \geq 1+7^n \quad \forall n \geq 1$$

$$\log(1+7^{n+1}) \geq \log(1+7^n) \quad \forall n \geq 1$$ perché $y = \log x$ è str. crescente

$$\frac{1}{\log(1+7^{n+1})} \leq \frac{1}{\log(1+7^n)} \quad \forall n \geq 1$$ perché $y = \frac{1}{x}$ è strett. decrescente in $(0,+\infty)$

La succ. b_n è decrescente, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+7^n)}$ converge per il criterio di Leibniz.

- Caso $\alpha < 6$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)}}_{= a_n}$$

Se $\alpha < 6$, allora $7-\alpha > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{n \cdot \log(7)} = +\infty$$

$+\infty$ per confronto di infiniti

La serie <u>non</u> converge ed, essendo a termini positivi, diverge positivamente

- <u>Caso $\alpha > 8$</u>

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{\log(1+7^n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)} = a_n$$

Osservo che $\alpha - 7 > 1$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\alpha-7)^n}{\log(1+7^n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(7-\alpha)^n}{n\cdot\log(7)} = +\infty$$

Dunque la succ. a_n non ha limite.

Dato che la succ. a_n non è infinitesima, quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ <u>non</u> converge.