Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 13 novembre 2025

In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
2. Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.
3. Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
4. Studiare la crescenza e decrescenza di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.
5. Calcolare la funzione derivata seconda di f. Studiare la concavità e convessità di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti di flesso.
6. Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

(a) (Prova d'esame 26 marzo 2018)

$f(x) = \arctan\left(\dfrac{|x|}{x-2}\right)$

(Fino allo studio della derivata seconda – esercizio iniziato nell'esercitazione del 6 novembre)

(b) $f(x) = \log\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right) - 2x$

(Studio fino alla derivata seconda)

(c) $f(x) = x^2 e^x - 1$

(Studio fino alla derivata seconda)

(d) (Prova d'esame 14 novembre 2019)

$f(x) = \dfrac{1}{7}\log|x^2 e^x - 1|$

(Fino allo studio della crescenza e decrescenza di f)

CONCLUSIONE ESERCITAZIONE 6/11/2025

Studio della funzione $f: \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

definita da $f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right)$

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $y = \frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale destro

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $y = -\frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale sinistro

$f'(x) = \frac{-2|x|}{x[x^2+(x-2)^2]}$ $\qquad$ $\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$

$x = 0$ punto angoloso

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2|x|}{x[x^2+(x-2)^2]} =$$

$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ se $x<0$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^2+(x-2)^2} = \frac{2}{0^2+(0-2)^2} = +\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2|x|}{x[x^2+(x-2)^2]} =$$

$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ se $x>0$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x^2+(x-2)^2} = -\frac{1}{2}$$

Abbiamo nuovamente ricavato che $x=0$ è punto angoloso applicando il teorema del limite della derivata.

- Punti stazionari

$$f'(x)=0 \qquad \text{dom}(f')=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$$

$$\frac{-2|x|}{x\left[x^2+(x-2)^2\right]}=0$$

$$-2|x|=0 \Rightarrow |x|=0 \Rightarrow x=0$$

$0\notin \text{dom}(f')$, quindi NON ci sono punti stazionari

- Studio del segno della derivata prima

$f'(x)\geq 0$

$-2|x|<0 \quad \forall x\neq 0$

$x>0$

$x^2+(x-2)^2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
$-2\|x\|$	$-$		$-$		$-$
x	$-$		$+$		$+$
$x^2+(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

f è strettamente crescente in $(-\infty,0)$
f è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $(0,2)$ e $(2,+\infty)$
$x=0$ punto di massimo relativo non stazionario

$f(0)=\arctan(0)=0$

- Derivata seconda

$$f'(x)=\frac{-2|x|}{x\left[x^2+(x-2)^2\right]}=\frac{-2|x|}{x(2x^2-4x+4)}=\frac{-|x|}{x(x^2-2x+2)}=\frac{-|x|}{x^3-2x^2+2x}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{|x|}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}(x^2-2x+2)-(-|x|)(3x^2-4x+2)}{x^2(x^2-2x+2)^2}=$$

$$= \frac{|x|\left(-x^2+2x-\cancel{2}+3x^2-4x+\cancel{2}\right)}{x^2(x^2-2x+2)^2} = \frac{|x|\,(2x^2-2x)}{x^2(x^2-2x+2)^2} =$$

$$= \frac{|x|\,(2x-2)}{x(x^2-2x+2)^2} \qquad \mathrm{dom}(f'') = \mathrm{dom}(f')$$

$f''(x) \geq 0$

$|x| > 0 \quad \forall x \neq 0$

$2x-2 \geq 0 \iff x \geq 1$

$x > 0$

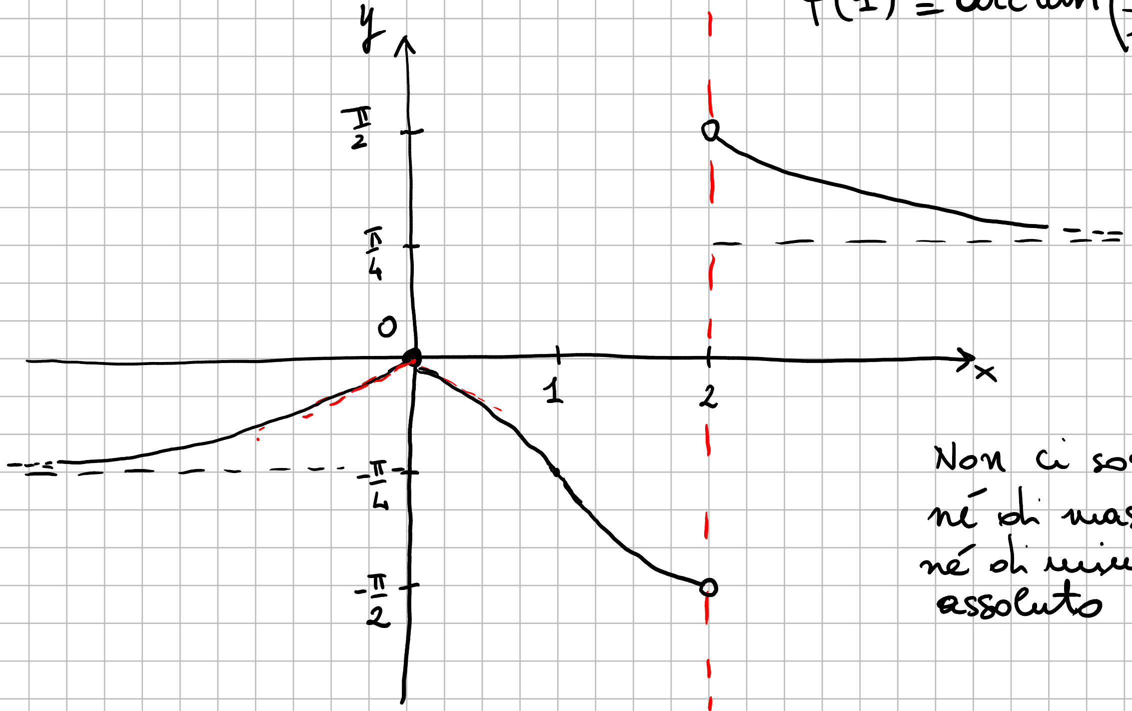
$(x^2-2x+2)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$\lvert x\rvert$	+		+		+		+
$2x-2$	−		−	0	+		+
x	−		+		+		+
$(x^2-2x+2)^2$	+		+		+		+
$f''(x)$	+		−	0	+		+
$f(x)$	∪		∩		∪		∪

f è convessa negli intervalli $(-\infty, 0)$, $(1,2)$ e $(2,+\infty)$ ed è concava in $(0,1)$

$x=1$ è punto di flesso a tangente obliqua

$$f(1) = \arctan\left(\frac{1}{1-2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$



Non ci sono punti né di massimo assoluto né di minimo assoluto

Studio della funzione $f: dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x$

- DOMINIO

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \iff x < -2 \vee x > 2$$

$$dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

- SIMMETRIE

$$f(-x) = \log\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right) + 2x =$$

$$= \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + 2x =$$

$$= \log\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1} + 2x =$$

$$= -\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + 2x =$$

$$= -\left\{\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2x\right\} = -f(x) \quad \forall x \in dom(f)$$

Quindi f è dispari.

- LIMITI ALLA FRONTIERA DEL DOMINIO

Algebra dei limiti

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \Bigg[\underbrace{\log\Big(\underbrace{\frac{x-2}{x+2}}_{\to 0^+}\Big)}_{\to -\infty} - 2x\Bigg] = -\infty - 4 = -\infty$$

$x = 2$ è asintoto verticale destro

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left[\log\left(\frac{x-2}{x+2} \right) - 2x \right] = +\infty + 4 = +\infty$$

$$\frac{x-2}{x+2}: \quad x-2 \to -4, \quad x+2 \to 0^-, \quad \frac{x-2}{x+2} \to +\infty$$

$x = -2$ è asintoto verticale sinistro

OSSERVAZIONE

Dato che la funzione è dispari, il calcolo sopra è inutile

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\log\left(\frac{x-2}{x+2} \right) - 2x \right] =$$

$$\frac{x-2}{x+2} \to 1$$

$$= \log(1) - \infty = -\infty$$

$\boxed{\begin{array}{l} x-2 \sim x \\ x+2 \sim x \\ \text{per } x \to +\infty \end{array}}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{perché } f \text{ è dispari}$$

Non ci sono asintoti orizzontali

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left[\log\left(\frac{x-2}{x+2} \right) - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\log\left(\frac{x-2}{x+2} \right)}_{\to 0} - 2 \right] = -2$$

$$q_+ = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - m_+ x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\log\left(\frac{x-2}{x+2} \right) - \cancel{2x} + \cancel{2x} \right] = 0$$

$\boxed{\begin{array}{l} y = -2x \\ \text{è asintoto} \\ \text{obliquo destro} \end{array}}$

OSSERVAZIONE 1

Dato che f è dispari, si ha $y = \frac{f(x)}{x}$ è pari

Quindi $m_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$

OSSERVAZIONE 2

Dato che f è dispari, si ha che $y = f(x) - m_- x$ è dispari

Quindi $q_- = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m_- x) = 0$

Dunque $y = -2x$ è anche asintoto obliquo sinistro, perciò è asintoto obliquo completo.

- DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \log\left(\frac{\overset{N}{x-2}}{\underset{D}{x+2}}\right) - 2x \qquad \left(\frac{N}{D}\right)' = \frac{N' \cdot D - N \cdot D'}{D^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - (x-2) \cdot 1}{(x+2)^2} - 2 =$$

$$= \frac{\cancel{x+2}}{x-2} \cdot \frac{4}{(x+2)^{\cancel{2}}} - 2 =$$

$$= \frac{4 - 2x^2 + 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{12 - 2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$

Non ci sono punti di non derivabilità

- PUNTI STAZIONARI

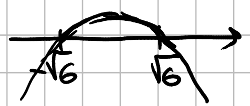
$$f'(x)=0$$

$$\frac{12-2x^2}{(x-2)(x+2)}=0 \Rightarrow 12-2x^2=0 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$$

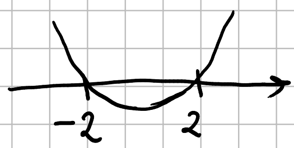
$x=\sqrt{6}$ punto stazionario
$x=-\sqrt{6}$ punto stazionario

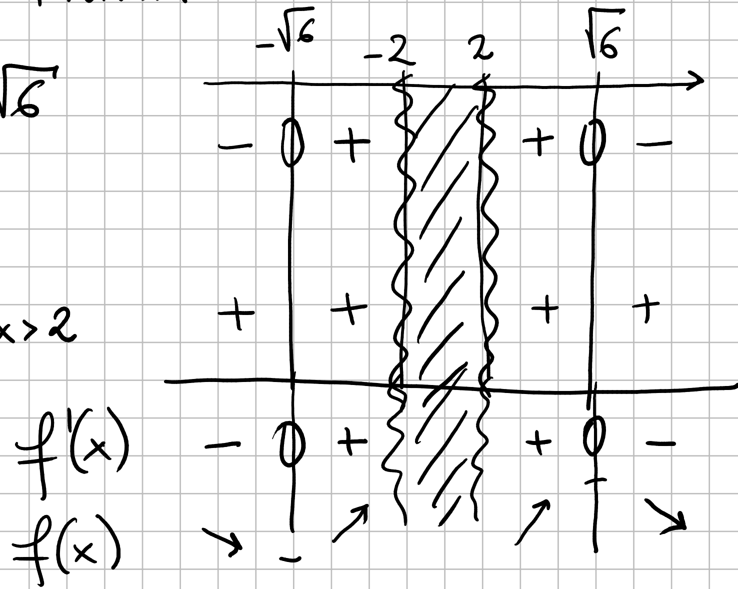
- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$$12-2x^2 \geq 0 \iff -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$$



$$(x-2)(x+2)>0 \iff x<-2 \vee x>2$$





f è strettamente decrescente in $(-\infty,-\sqrt{6})$ e in $(\sqrt{6},+\infty)$

f è strettamente crescente in $(-\sqrt{6},-2)$ e in $(2,\sqrt{6})$

$x=-\sqrt{6}$ è punto di minimo relativo stazionario
$x=\sqrt{6}$ è punto di massimo relativo stazionario

- DERIVATA SECONDA

$$f'(x)=\frac{12-2x^2}{x^2-4}$$

$$\frac{d}{dx}(12-2x^2)=0-2\cdot 2x=-4x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2-4)=2x+0=2x$$

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2-4)-(12-2x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-2x\left(\cancel{2x^2} - 8 + 12 - \cancel{2x^2}\right)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$$\text{dom}(f'') = \text{dom}(f)$$

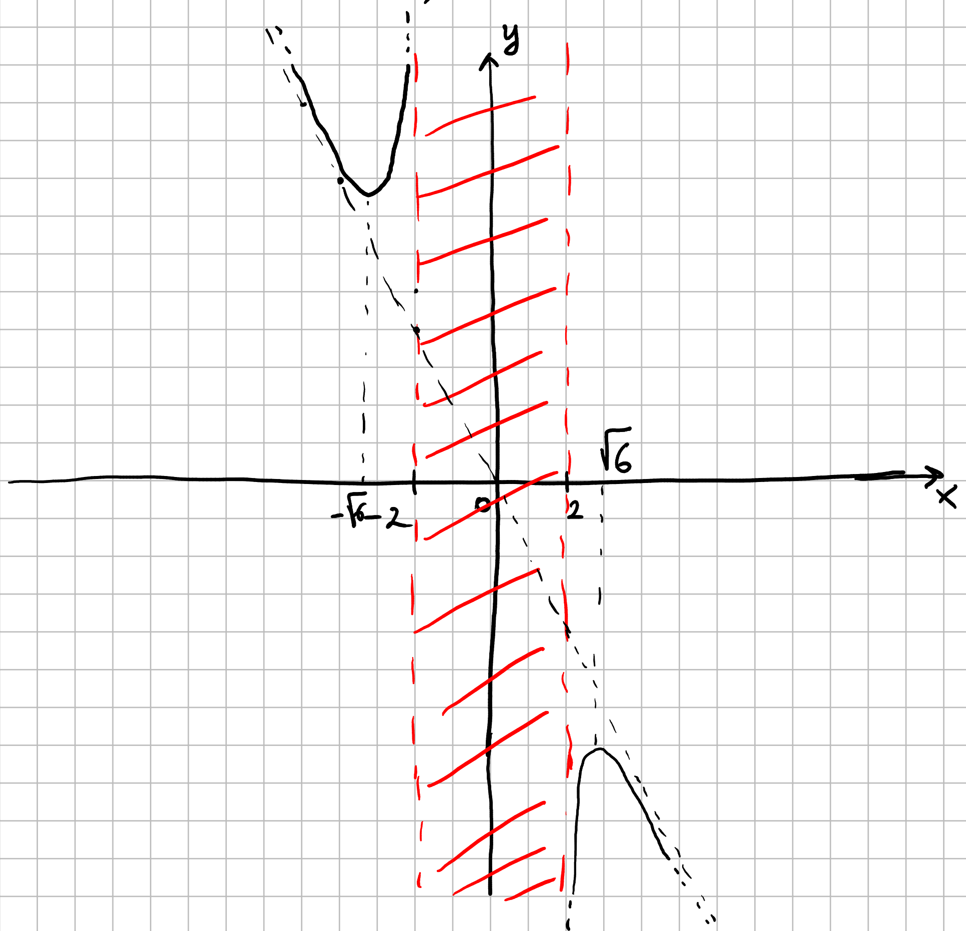
- SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

$-8x \geq 0 \iff x \leq 0$

$(x^2-4)^2 > 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f)$

		-2 $\quad$ 0 $\quad$ 2	
	$+$		$-$
	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

f è convessa in $(-\infty, -2)$ ed è concava in $(2, +\infty)$



Non ci sono punti né di massimo assoluto né di minimo assoluto, perché f è illimitata superiormente e inferiormente

Studio della funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 e^x - 1$

- DOMINIO DI f

  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ perché $y = x^2$ e $y = e^x$ sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi lo è anche il loro prodotto.

- SIMMETRIE

  $f(1) = e - 1 \qquad f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \qquad f(1) \neq f(-1)$

  $f(1) \neq -f(-1)$

  f non è né pari né dispari

- ASINTOTI

  Non ci sono asintoti verticali, perché f è continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 e^x - 1) = +\infty - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (\underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{e^x}_{0} - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0}$$

$y = -1$ è asintoto orizzontale sinistro

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{x e^x}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} \right) = +\infty$$

Non ci sono né as. orizzontale né as. obliquo destro

DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{F_1}\underbrace{e^x}_{F_2} - 1 \qquad (F_1 F_2)' = F_1' \cdot F_2 + F_1 \cdot F_2'$$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

Non ci sono punti di <u>non</u> derivabilità

- PUNTI STAZIONARI

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2+2x)e^x = 0 \iff x^2+2x = 0 \iff x(x+2) = 0$$

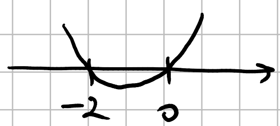
$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\iff x = 0 \lor x = -2$$

- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x(x+2) \geq 0 \iff x \leq -2 \lor x \geq 0$



		-2		0	
	$+$	0	$-$	0	$+$
	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

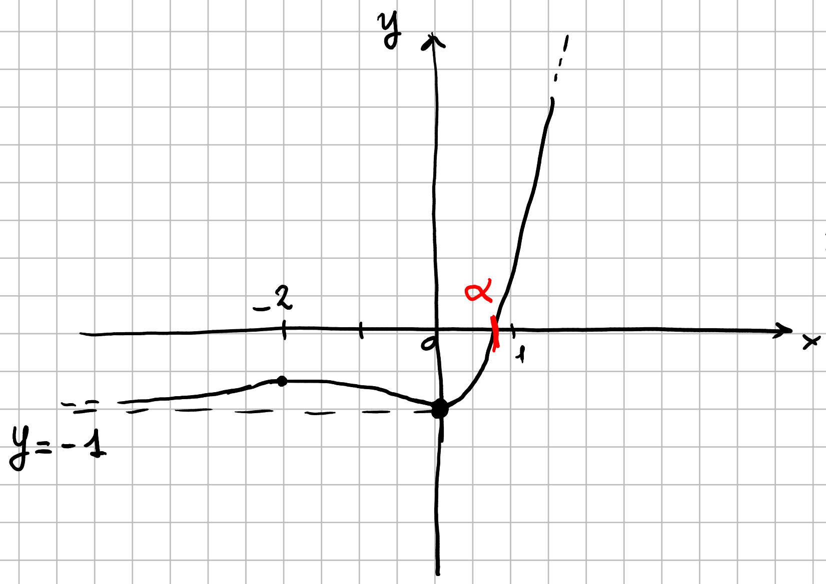
f è strett. crescente in $(-\infty, -2)$ e in $(0, +\infty)$,
e strett. decrescente in $(-2, 0)$

$x = -2$ è punto di massimo relativo stazionario

$x = 0$ è punto di minimo relativo stazionario

. Esercizio: derivata seconda e studio della convessità

$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 - 1 = -1 \qquad f(-2) = \frac{4}{e^2} - 1 < 0$$



$f(1) = e - 1 > 0$

f ha un unico zero $\alpha \in (0,1)$

Studio della funzione $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{7}\log|x^2e^x - 1|$

- DOMINIO DI f

$$|x^2e^x - 1| > 0 \iff x^2e^x - 1 \neq 0 \iff x \neq \alpha$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$$

- SIMMETRIE

f non è né pari né dispari, perché il suo dominio non è simmetrico rispetto a 0.

- ASINTOTI

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{7}\log\underbrace{|\underbrace{x^2e^x - 1}_{\to 0}|}_{\to 0^+} = \frac{1}{7}(-\infty) = -\infty$$

$x = \alpha$ è asintoto verticale completo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7}\log|\underbrace{x^2e^x - 1}_{\to +\infty}| = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{7}\log\left|\underset{\downarrow\atop -1}{x^2e^x-1}\right| = \frac{1}{7}\cdot\log(1) = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale sinistro

$x^2e^x-1>0$ se $x>\alpha$

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7}\frac{\log|x^2e^x-1|}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7}\frac{\log(x^2e^x-1)}{x} =$$

$x^2e^x-1 \sim x^2e^x$ per $x\to+\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7}\frac{\log(x^2e^x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7}\frac{\log(x^2)+\log(e^x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7}\cdot\frac{2\log(x)+x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2}{7}\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{\log(x)}{x}} + \frac{1}{7}\cdot\frac{x}{x}\right] = \frac{1}{7}$$

$$q_+ = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m_+x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{7}\log(x^2e^x-1) - \frac{1}{7}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{7}\underbrace{\log(x)}_{\downarrow\atop +\infty} + \cancel{\frac{1}{7}x} - \cancel{\frac{1}{7}x}\right) = +\infty$$

Non c'è né as. orizzontale né as. obliquo destro

- DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \frac{1}{7} \cdot \log |x^2 e^x - 1|$$

$$f'(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{|x^2 e^x - 1|}} \cdot \frac{\cancel{|x^2 e^x - 1|}}{x^2 e^x - 1} \cdot x(x+2)e^x$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{x(x+2)e^x}{x^2 e^x - 1}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$

Non ci sono punti di non derivabilità

- PUNTI STAZIONARI

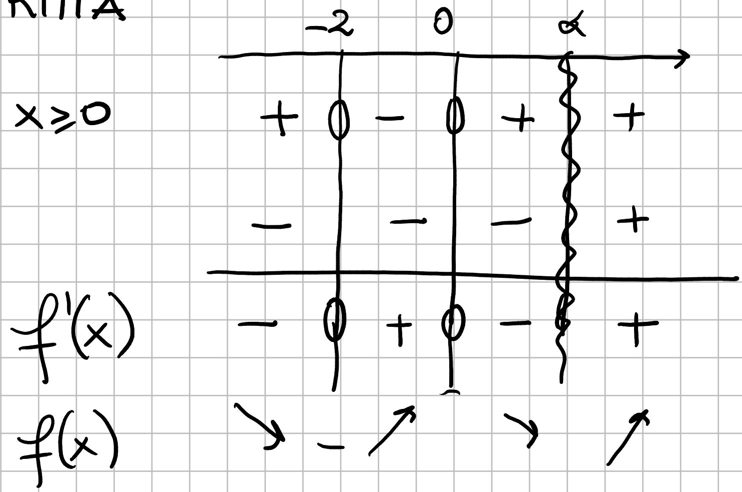
$f'(x) = 0$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{x(x+2)e^x}{x^2 e^x - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$$

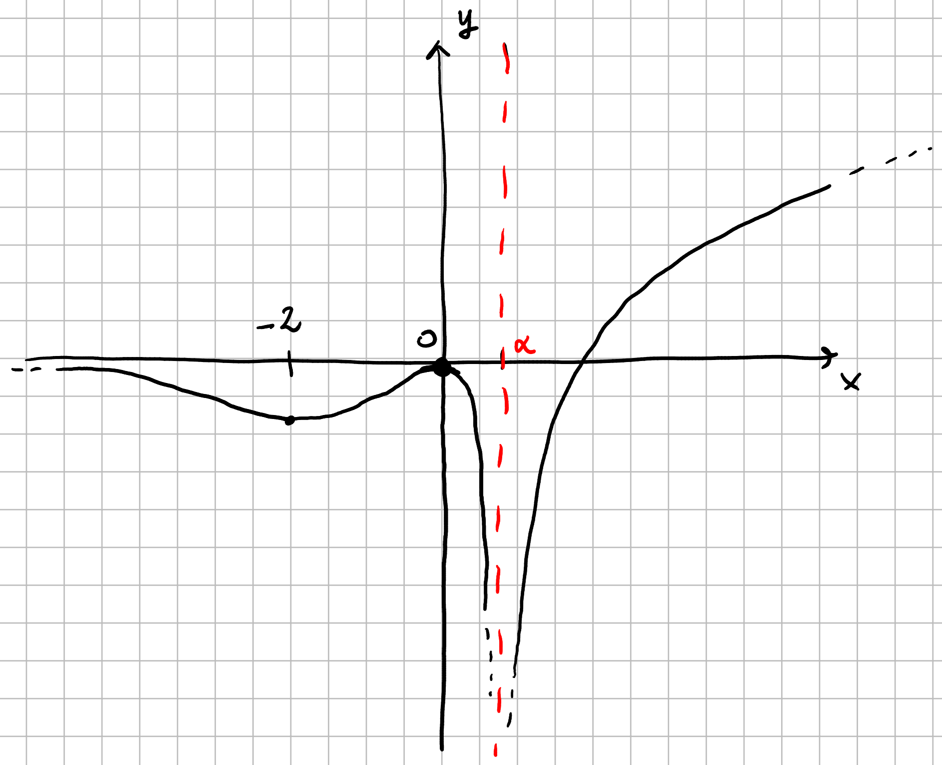
- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$x(x+2)e^x \geq 0 \iff x \leq -2 \vee x \geq 0$

$x^2 e^x - 1 > 0 \iff x > \alpha$



$$f(0) = \frac{1}{7} \log |0^2 \cdot e^0 - 1| = \frac{1}{7} \cdot \log(1) = 0$$



y
x
-2
0
α