Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 6 novembre 2025

1. (Test 3 febbraio 2020) Sia
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(3x)-1}{3x} & \text{se } x<0\\ \sqrt{x^2+49}-7 & \text{se } x\geqslant 0.\end{cases}$$
Discutere la derivabilità di f in $x=0$.

2. (Test 13 gennaio 2020) Sia
$$f(x)=\begin{cases}x^2\sqrt{\dfrac{49}{x^2}+\log|x|} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$
Discutere la derivabilità di f in $x=0$.

3. (Variante prova d'esame 1 settembre 2017) Siano $\alpha\in\mathbb{R}$ e $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha-7}\log x & \text{se } x>0\\ \sqrt{-x} & \text{se } x\leqslant 0.\end{cases}$$
Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ discutere la derivabilità di f nel punto $x=0$ e classificare il tipo di non derivabilità.

4. In ciascuno dei seguenti esercizi è data una funzione $f\colon \mathrm{dom}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.
   (a) $f(x)=\dfrac{e^{-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+5x\right)}}{5}$
   (b) $f(x)=\left((7x+1)^5-1\right)^6-5\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$
   (c) $f(x)=|x|$
   (d) $f(x)=\log|2-3x|+\dfrac{1-x}{3x-2}$
   (e) $f(x)=\dfrac{x+2}{|x+2|}\cdot\dfrac{1}{3x^2+e^x}$
   (f) $f(x)=\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

5. Si consideri la funzione $f\colon \mathrm{dom}(f)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$
   (1) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
   (2) Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per f.

(3) Calcolare la funzione derivata prima di f e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

(4) Studiare la crescenza e decrescenza di f sul suo dominio, calcolando, qualora esistano, punti stazionari, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per f.

(5) Tracciare un grafico qualitativo della funzione f, in accordo con i risultati ottenuti.

(Test 3 febbraio 2020) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(3x) - 1}{3x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 49} - 7 & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Discutere la derivabilità di f in $x = 0$.

- Discussione della continuità di f in $x=0$

$$f(0) = \sqrt{0^2+49} - 7 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+49}-7\right) = 0$$

$$\boxed{1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2 \text{ per } t\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(3x)-1}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{3x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{9}{2}x^{\cancel{2}}}{3\cancel{x}} = 0$$

f è continua in $x=0$, perché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

- Discussione della derivabilità di f in $x=0$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(3x)-1}{3x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{\cancel{9}^{\,3}}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{3}_{\,1}\cancel{x^2}} = -\frac{3}{2}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\sqrt{x^2+49}-7}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} =$$

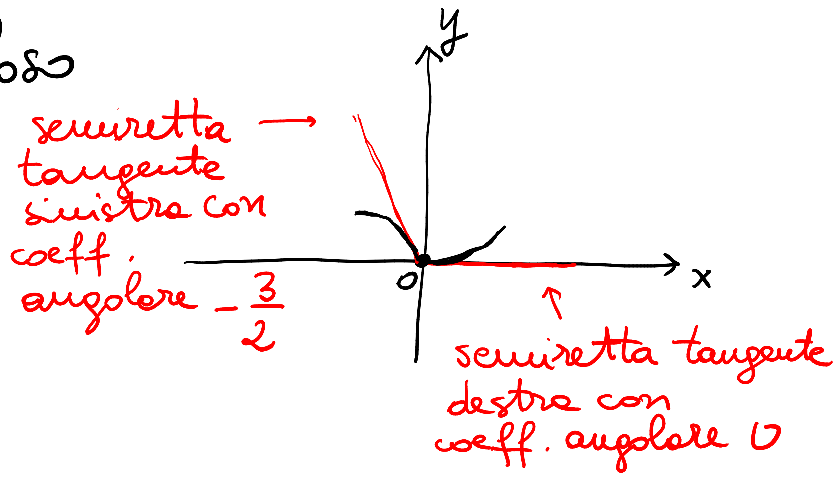
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2+49}-7}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+49}+7}{\sqrt{x^2+49}+7} =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+\cancel{49}-\cancel{49}}{x\left[\sqrt{x^2+49}+7\right]} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^2}\; x \to 0}{1\,\cancel{x}\,\underbrace{\left[\sqrt{x^2+49}+7\right]}_{14}} = 0$$

Dato che $f'_+(0)=0$ e $f'_-(0)=-\frac{3}{2}$,

f non è derivabile in $x=0$ e

$x=0$ è punto angoloso



(13/01/2020) Discutere la derivabilità in $x=0$ di

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sqrt{\dfrac{49}{x^2}+\log|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Discussione della continuità di f in $x=0$

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\sqrt{\frac{49}{x^2}+\log|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{x^4\cdot\frac{49}{x^2}+x^4\log|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{\underbrace{49x^2}_{\downarrow\, 0}+\underbrace{x^4\log|x|}_{\downarrow\, 0}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0}$$

f è continua in $x=0$, perché $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

- Discussione della derivabilità in $x=0$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} x^{\cancel{2}}\sqrt{\frac{49}{x^2}+\log|x|}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} x\sqrt{\frac{49+x^2\log|x|}{x^2}} =$$

$$\boxed{\sqrt{x^2}=|x| \text{ per ogni } x\in\mathbb{R}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}\sqrt{49+x^2\log|x|} =$$

$|x|=-x$ se $x<0$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}^{\,1}}{-\cancel{x}_{\,1}}\sqrt{49+\underbrace{x^2\log|x|}_{\to 0}} = -7$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^2\sqrt{\frac{49}{x^2}+\log|x|}\cdot\frac{1}{x} =$$

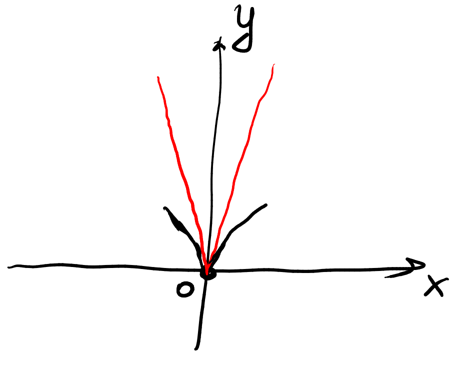
$$= \lim_{x\to 0^+} x\sqrt{\frac{49+x^2\log|x|}{x^2}} =$$

$|x|=x$ se $x>0$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}\sqrt{49+x^2\log|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{49+x^2\log|x|} = 7$$

Dato che $f'_-(0)=-7$ e $f'_+(0)=7$, f non è derivabile in $x=0$ e $x=0$ è punto angoloso



Osservazione. f è una funzione pari, quindi

la funzione $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, è dispari.
Dunque è sufficiente calcolare uno dei limiti
$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, per ottenere anche
l'altro (i due limiti sono uno l'opposto dell'altro).

(01/09/2017) Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-7} \log x & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

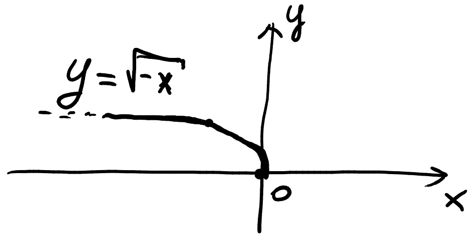
Discutere la derivabilità di f in $x=0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Discussione della continuità di f in $x=0$

$$f(0) = \sqrt{-0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0$$

f è continua da sinistra in $x=0$



$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-7} \log x = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 7 \\ 1 \cdot (-\infty) & \text{se } \alpha = 7 \\ +\infty \cdot (-\infty) & \text{se } \alpha > 7 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-7} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 7 \\ 1 & \text{se } \alpha = 7 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 7 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 7 \\ -\infty & \text{se } \alpha \leq 7 \end{cases}$$

Se $\alpha \leq 7$, allora f <u>non</u> è continua in $x=0$ e $x=0$ è punto di infinito

Se $\alpha > 7$, allora f è continua in $x=0$, perché $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

- Discussione della derivabilità di f in $x=0$ nel caso $\alpha > 7$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - \overset{=0}{f(0)}}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{(-x)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(-\sqrt{\frac{\cancel{-x}}{(-x)^{\cancel{2}}}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{-x}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

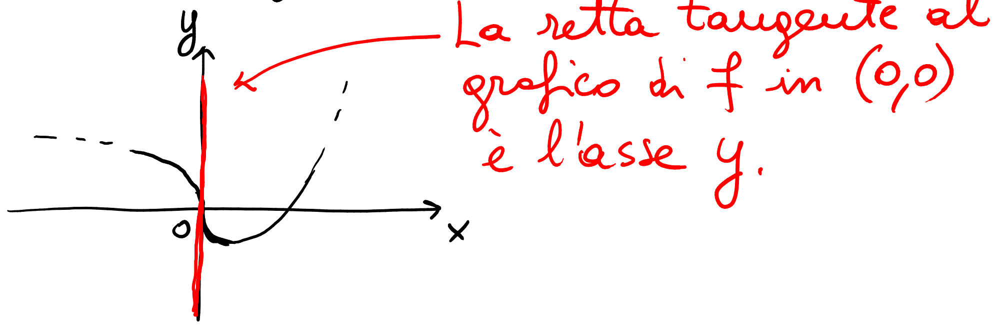
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha - 7} \log x}{x} =$$

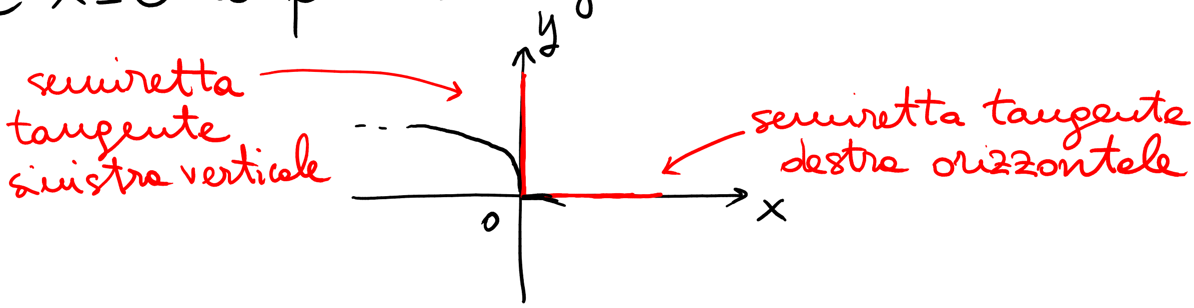
$$= \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-8}\log x = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>8 \\ 1\cdot(-\infty) & \text{se } \alpha=8 \\ +\infty\cdot(-\infty) & \text{se } 7<\alpha<8 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>8 \\ -\infty & \text{se } 7<\alpha\leq 8 \end{cases}$$

Se $7<\alpha\leq 8$, allora $f'_-(0)=f'_+(0)=-\infty$, quindi f non è derivabile in $x=0$ e $x=0$ è punto a tangente verticale.



Se $\alpha>8$, allora $f'_-(0)=-\infty$ e $f'_+(0)=0$, quindi f non è derivabile in $x=0$ e $x=0$ è punto angoloso.



Calcolare la derivata di

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5x\right)}}{5}$$

dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{\left(-x^{-1/3} - 5x\right)}$$

$$x \longmapsto -x^{-\frac{1}{3}} - 5x \longmapsto e^{\left(-x^{-1/3} - 5x\right)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right) = e^{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-x^{-1/3} - 5x\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} - 5 =$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{\left(-x^{-1/3} - 5x\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 5\right) =$$

$$= e^{-x^{-1/3} - 5x} \cdot \left(\frac{1}{15 \cdot x^{4/3}} - 1\right) =$$

$$= e^{-x^{-1/3} - 5x} \cdot \left(\frac{1}{15x\sqrt[3]{x}} - 1\right)$$

dom (f') = dom (f)

f non ha punti di non derivabilità

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \left((7x+1)^5 - 1\right)^6 - \underbrace{5\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{è una costante}}$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (7x+1) \longmapsto (7x+1)^5 - 1 \longmapsto \left((7x+1)^5 - 1\right)^6$$

$$\frac{d}{dx}(x^6) = 6x^5 \qquad \frac{d}{dx}(7x+1) = 7$$

$$\frac{d}{dx}(x^5 - 1) = 5x^4$$

$$f'(x) = \overbrace{6\left((7x+1)^5 - 1\right)^5}^{\text{derivata dell'elev. alla } 6^a \text{ valutata in } (7x+1)^5-1} \cdot 5(7x+1)^4 \cdot 7 =$$

$$= 210(7x+1)^4\left((7x+1)^5 - 1\right)^5$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathbb{R}$

Non ci sono punti di non derivabilità

Calcolare la derivata di $f(x)=|x|$

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$\text{dom}(f)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$\text{dom}(f')=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $x=0$ è punto angoloso

OSSERVAZIONE.

Si può scrivere $f'(x)=\dfrac{x}{|x|}$ o

$f'(x)=\dfrac{|x|}{x}$ per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log|2-3x| + \frac{1-x}{3x-2}$$

• DOMINIO di f

$$\begin{cases} 3x-2 \neq 0 \\ |2-3x| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-2 \neq 0 \\ 2-3x \neq 0 \end{cases} \iff 3x-2 \neq 0 \iff x \neq \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

• DERIVATA DI f

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\overset{N}{1-x}}{\underset{D}{3x-2}}\right) = \frac{\overset{N'}{-1} \cdot \overset{D}{(3x-2)} - \overset{N}{(1-x)} \cdot \overset{D'}{3}}{\underbrace{\boxed{(3x-2)^2}}_{D^2}} = \frac{-3x+2-3+3x}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-1}{(3x-2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log|2-3x|\right) = \frac{1}{\cancel{|2-3x|}} \cdot \frac{\cancel{|2-3x|}}{2-3x} \cdot (-3) = \frac{3}{3x-2}$$

$$x \longmapsto 2-3x \longmapsto |2-3x| \longmapsto \log|2-3x|$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x-2} + \frac{-1}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{3(3x-2)-1}{(3x-2)^2} = \frac{9x-7}{(3x-2)^2}$$

$\operatorname{dom}(f') = \operatorname{dom}(f)$ e non ci sono punti di non derivabilità

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot \frac{1}{3x^2+e^x}$$

$$\begin{cases} |x+2| \neq 0 \\ 3x^2+e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x+2 \neq 0 \iff x \neq -2$$

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $3x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi $3x^2+e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x+2}{|x+2|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > -2 \\ -1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3x^2+e^x} = (3x^2+e^x)^{-1} \\ x \longmapsto 3x^2+e^x \longmapsto (3x^2+e^x)^{-1} \end{array}}$$

$$f'(x) = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot \left[-1 \cdot (3x^2+e^x)^{-2}\right] \cdot (6x+e^x) =$$

$$= \frac{x+2}{|x+2|} \cdot \frac{-(6x+e^x)}{(3x^2+e^x)^2}$$

$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f)$

Non ci sono punti di non derivabilità

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \cdot \dfrac{-(6x+e^x)}{(3x^2+e^x)^2} = -\dfrac{6x+e^x}{(3x^2+e^x)^2} & \text{se } x > -2 \\ -1 \cdot \dfrac{-(6x+e^x)}{(3x^2+e^x)^2} = \dfrac{6x+e^x}{(3x^2+e^x)^2} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$$

base positiva

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x > 0 \qquad \mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$$

l'esponente deve avere significato

$$f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} = e^{\log\left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\right)} = e^{\sqrt{x}\log(\sqrt{x})} =$$

$$= e^{\sqrt{x}\log(x^{1/2})} = e^{\frac{\sqrt{x}}{2}\log x}$$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{2}\log x \longmapsto e^{\frac{\sqrt{x}}{2}\log x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\overbrace{\frac{\sqrt{x}}{2}}^{F_1}\overbrace{\log x}^{F_2}\right) = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}^{F_1'}\cdot\overbrace{\log x}^{F_2} + \overbrace{\frac{\sqrt{x}}{2}}^{F_1}\cdot\overbrace{\frac{1}{x}}^{F_2'} =$$

$$= \frac{\log x}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\log(x) + 2}{4\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\log x}\cdot\frac{\log(x)+2}{4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\left(\log(x)+2\right)}{4\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}\left(\log(x)+2\right) =$$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

$$= \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2}}\left(\log(x)+2\right)$$

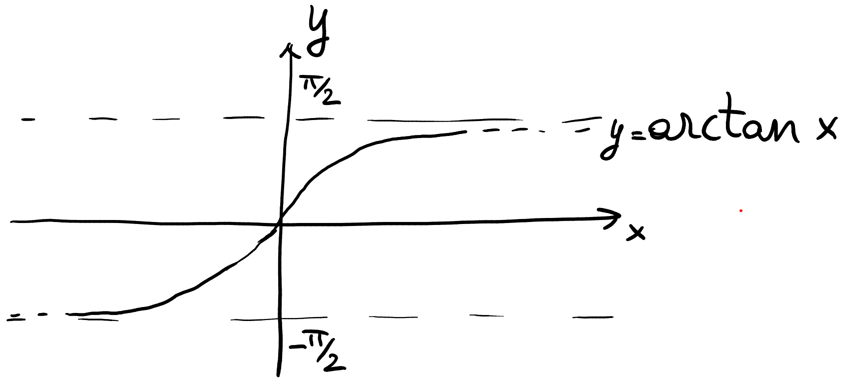
$\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) = (0,+\infty)$

Non ci sono punti di non derivabilità

Studiare (fino alla derivata prima)

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right)$$

- Dominio ed eventuali simmetrie



$x-2 \neq 0 \iff x \neq 2 \qquad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

perché arcotangente e funzione modulo hanno dom $\mathbb{R}$

f non è né pari né dispari, perché il dominio non è simmetrico rispetto a 0

- Asintoti

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\underbrace{\frac{\overbrace{|x|}^{\to 2}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \arctan\left(\underbrace{\frac{\overbrace{|x|}^{\to 2}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^-}}}_{\to -\infty}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

<u>Non</u> ci sono asintoti verticali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{|x|}{\underbrace{x-2}_{\sim x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{x}\right) =$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale destro

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{-x}{x}\right) =$$

$$= \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale sinistro

Non ci sono asintoti obliqui

- Derivata prima di f

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{|x|}{x-2}\right) = \frac{\frac{|x|}{x}\cdot(x-2) - |x|\cdot 1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{|x|}{x}(x-2-x)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-2|x|}{x(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{|x|}{x-2}\right)^2} \cdot \frac{-2|x|}{x(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x-2)^2}} \cdot \frac{-2|x|}{x(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(x-2)^2+x^2}{(x-2)^2}} \cdot \frac{-2|x|}{x(x-2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)^2}}{(x-2)^2+x^2} \cdot \frac{-2|x|}{x\cancel{(x-2)^2}} =$$

$$= \frac{-2|x|}{x\left[(x-2)^2+x^2\right]}$$

$\operatorname{dom}(f') = \operatorname{dom}(f) \setminus \{0\}$

$x^2+(x-2)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $(x-2)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e i due quadrati non si annullano per gli stessi valori di x

Studio della derivabilità di f in $x=0$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right) - \arctan\left(\frac{0}{0-2}\right)}{x} =$$

$\arctan 0 = 0$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) =$$

$$\boxed{\arctan t \sim t \text{ per } t\to 0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \frac{\cancel{x}}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right) =$$

$|x| = -x$ se $x<0$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot \arctan\left(\frac{-x}{x-2}\right) =$$

$\arctan t \sim t$ per $t\to 0$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{\cancel{x}}{x-2}\right) = \frac{1}{2}$$

$x=0$ è punto angoloso

- Studio del segno della derivata prima
- Grafico di f in accordo con i risultati precedenti

CONCLUSIONE NELL'ESERCITAZIONE DEL 13/11/2025