Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 23 ottobre 2025

1. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}.$$

2. Studiare la continuità della funzione $f\colon \left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x)\arctan(2x)}{1-\cos(4x)} & \text{se } x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\\ -18 & \text{se } x=0\\ \left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)(\cos 3x-1) & \text{se } x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

3. (Prova d'esame 6 febbraio 2014) Siano $\alpha\in\mathbb{R}$ e $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x)=\begin{cases}(2+x^2)^\alpha & \text{se } x\leqslant 0\\ \dfrac{\log(1+\sin^2(2x))}{\arctan x^\alpha} & \text{se } x>0.\end{cases}$$
Discutere la continuità di f in $x=0$ al variare di α e classificare le eventuali discontinuità.

4. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+9x-7}}{5x-6}$.

5. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

6. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x.$$

7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x}{3}}$.

8. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to e}(\log x)^{\frac{1}{\log^3(\log x)}}$.

9. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$.

10. (Prova in itinere 13 novembre 2009) Sia $\alpha\in\mathbb{R}$ e sia f la funzione definita da
$$f(x)=\begin{cases}\sin^2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\log(x) & \text{se } x>1\\ \alpha-7 & \text{se } x=1\\ \dfrac{(e^{x-1}-1)\tan^2(x-1)}{1-\cos(x-1)} & \text{se } x<1.\end{cases}$$
Si discuta al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ la continuità di f in $x=1$. Nel caso in cui f risulti discontinua classificare il tipo di discontinuità.

11. (Prova in itinere 26 novembre 2010) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha \left[\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + \dfrac{4(e^{x-1}-1)}{2x-2}\right] & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x \leqslant 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 1$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità.

Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$$

$y = \sin x$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi anche in 0

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$$

$y = \cos x$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi anche in 0

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1}$$

cioè

$\log(1+t) \sim t$ per $t\to 0$

Dato che $(\cos x - 1)\to 0$ per $x\to 0$,

$\log(1+(\cos x-1)) \sim \cos x - 1$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\overbrace{\cos x}^{\to 1})}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\to 0})}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{x=\tan y}{=}$$

se $x\to 0$, allora $y\to 0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\arctan(\tan y)}{\tan y} =$$

$\arctan(\tan y) = y \quad \forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Algebra dei limiti

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\tan y}{y}}_{\to 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{\text{Abbiamo ricavato che } \arctan x \sim x \text{ per } x \to 0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = $$

$x = \sin y$

se $x \to 0$ allora $y \to 0$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} =$$

$\arcsin(\sin y) = y \ \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1$$

$\frac{\sin y}{y} \to 1$

$\boxed{\text{Abbiamo ricavato che } \arcsin x \sim x \text{ per } x \to 0}$

Studiare la continuità della funzione $f : \left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)\arctan(2x)}{1-\cos(4x)} & \text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ -18 & \text{se } x = 0 \\ \left(\dfrac{4}{x^2} - 1\right)(\cos(3x) - 1) & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

- $1-\cos(4x) \neq 0$

  $\cos(4x) \neq 1$

  $4x \neq 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

  $x \neq k\frac{\pi}{2}$

$1-\cos(4x)$ non si annulla se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

- f è continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ed è continua in $(0, +\infty)$, perché si ottiene come prodotti, quozienti, somme e composizioni di funzioni elementari, che sono continue nel loro dominio

- studiamo la continuità di f in $x=0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(3x)\arctan(2x)}{1-\cos(4x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x \cdot 2x}{\frac{1}{2}\cdot(4x)^2} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(t) \sim t \text{ per } t \to 0 \\ \arctan(t) \sim t \text{ per } t \to 0 \\ (1-\cos t) \sim \frac{1}{2} t^2 \text{ per } t \to 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cancel{x^2}}{\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\cancel{16}^{\cancel{8}\,4}\cancel{x^2}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{4}{x^2}-1\right)\left(\cos(3x)-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{4}{x^2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}(3x)^2\right) =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{4}{x^2}-1\right)\left(-\frac{9}{2}x^2\right) =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(-18+\frac{9}{2}x^2\right) = -18$$

$f(0) = -18$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = -18$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{3}{4}$

f non è continua in $x=0$ e $x=0$ è punto di salto

f è continua da destra in $x=0$

(06/02/2014)

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} (2+x^2)^\alpha & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\log(1+\sin^2(2x))}{\arctan(x^\alpha)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Discutere la continuità di f in $x=0$ e classificare le eventuali discontinuità.

- $f(0) = (2+0^2)^\alpha = 2^\alpha$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2+x^2)^\alpha = 2^\alpha$

$y = x^2$ e $y = t^\alpha$ sono funzioni continue

Quindi f è continua da sinistra in $x=0$

- Rimane da calcolare $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(1+\sin^2(2x))}{\arctan(x^\alpha)}$

NUMERATORE

$$\log(1+\underbrace{\sin^2(2x)}_{\to 0}) \sim \sin^2(\underbrace{2x}_{\to 0}) \sim (2x)^2 = 4x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\boxed{\log(1+t) \sim t \quad \text{e} \quad \sin t \sim t \quad \text{per } t \to 0}$$

DENOMINATORE

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

Caso $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin^2(2x))}{\arctan(x^\alpha)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{x^\alpha}$$

$x^\alpha \downarrow 0$

$$\boxed{\arctan t \sim t \quad \text{per } t\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 4x^{2-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \boxed{0<\alpha<2} \\ 4 & \text{se } \boxed{\alpha=2} \\ +\infty & \text{se } \boxed{\alpha>2} \end{cases}$$

esponente $2-\alpha$ positivo

esponente $2-\alpha$ che è uguale a 0

esponente $2-\alpha$ negativo

$$2-\alpha>0 \iff \alpha<2$$

Caso $\alpha = 0$

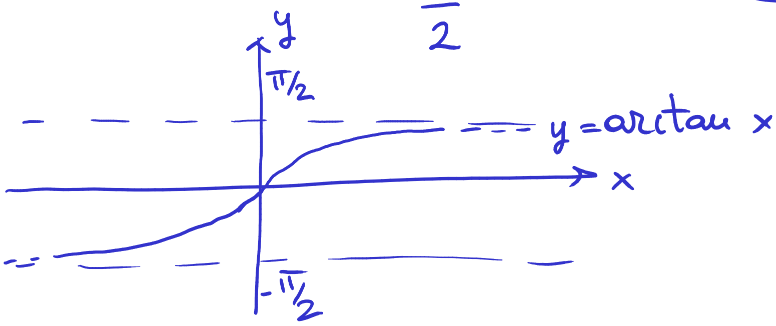
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin^2(2x))}{\arctan(x^0)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin^2(2x))}{\frac{\pi}{4}} = \frac{0}{\frac{\pi}{4}} = 0$$

Caso $\alpha < 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin^2(2x))}{\arctan(x^\alpha)} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$x^\alpha \to +\infty, \quad \arctan(x^\alpha) \to \frac{\pi}{2}$$



Riassumendo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ 4 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Se $\alpha < 2$, allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2^\alpha, \quad f(0) = 2^\alpha$$

quindi $x=0$ è un punto di salto per f (osservando che $2^\alpha \neq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$).

Se $\alpha = 2$, allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2^2 = 4, \quad f(0) = 2^2 = 4$$

quindi f è continua in $x=0$.

Se $\alpha > 2$, allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2^\alpha, \quad f(0) = 2^\alpha$$

quindi $x=0$ è punto di infinito per f

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+9x-7}}{5x-6} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{9}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}}{x\left(5-\frac{6}{x}\right)} =$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{9}{x}-\frac{7}{x^2}}}{x\left(5-\frac{6}{x}\right)} =$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{9}{x}-\frac{7}{x^2}}}{\cancel{x}\left(5-\frac{6}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{4}}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{9}{x} \to 0, \quad \frac{7}{x^2} \to 0, \quad \frac{6}{x} \to 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2-5x+6} + x}{\sqrt{x^2-5x+6} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 5x + 6 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-5 + \frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} + x} =$$

$|x| = x$ se $x > 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-5 + \frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-5 + \underbrace{\frac{6}{x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{6}{x^2}}_{\to 0}} + 1\right)} = \frac{-5}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

$y=-x$

se $x\to-\infty$, allore $y\to+\infty$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} =$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{(y-1)+1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} =$$

$z=y-1$ $\qquad$ $y=z+1$

se $y\to+\infty$, allore $z\to+\infty$

$$=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1} =$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}}_{\downarrow\, e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{z}\right)}_{\downarrow\, 1} = e$$

Abbiamo ricavato che $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x =$$

$\frac{x}{7}=y \qquad x=7y$

se $x\to+\infty$, allora $y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{7y} = \lim_{y\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{\to e}\Bigg]^7 = e^7$$

continuità della funzione $t\mapsto t^7$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x =$$

$-\frac{x}{5}=y \qquad x=-5y$

se $x\to+\infty$, allora $y\to-\infty$

$$= \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-5y} = \lim_{y\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-5} = e^{-5}$$

In generale,

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \forall a\in\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{2x-1}{2x+3}}_{\to 1}\right)^{\overset{\to 0}{\frac{x}{3}}} =$$

$2x-1 \sim 2x$ per $x\to+\infty$

$2x+3 \sim 2x$ per $x\to+\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2x+3)-4}{2x+3}\right)^{\frac{x}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{\frac{x}{3}} =$$

$y=2x+3 \qquad x=\frac{y-3}{2}$

se $x\to+\infty$ allora $y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{4}{y}\right)^{\frac{y-3}{6}} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{4}{y}\right)^{\frac{y}{6}}\cdot\left(1-\frac{4}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{4}{y}\right)^{y}}_{\to e^{-4}}\Bigg]^{1/6}\cdot\left(1-\underbrace{\frac{4}{y}}_{\to 0}\right)^{-1/2} = e^{-4/6}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{2}}}$$

$$\boxed{A^B = e^{\log A^B} = e^{B\cdot \log A} \quad \text{per ogni } A>0 \;\; \text{per ogni } B\in\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to e} (\underbrace{\log x}_{\to 1})^{\frac{1}{\log^3(\log x)}\to 0} =$$

$y=\log x$

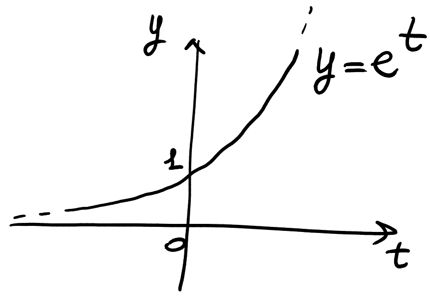
se $x\to e$ allora $y\to 1$

$$= \lim_{y\to 1} y^{\frac{1}{\log^3 y}} =$$

$$= \lim_{y\to 1} e^{\frac{1}{\log^3 y}\cdot \log y} =$$

$$= \lim_{y\to 1} e^{\frac{1}{\log^2 y}} = +\infty$$

$\frac{1}{\log^2 y}\to+\infty$, $\log^2 y \to 0^+$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\underbrace{\sin x}_{\to 1})^{\tan^2 x} =$$

$\tan^2 x \to +\infty$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{(\tan^2 x)\log(\sin x)} =$$

$\log(1+t)\sim t$ per $t\to 0$

$\log(\sin x) = \log(1+\underbrace{(\sin x - 1)}_{\to 0}) \sim \sin x - 1$ per $x\to\frac{\pi}{2}$

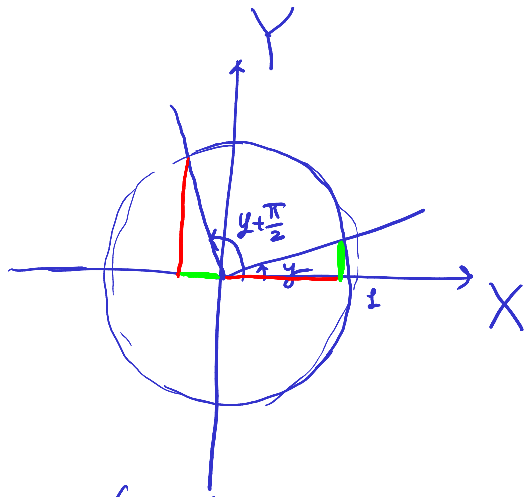
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{(\tan^2 x)\cdot(\sin x - 1)} =$$

$y = x-\frac{\pi}{2}$

se $x\to\frac{\pi}{2}$ allora $y\to 0$

$$= \lim_{y \to 0} e^{\left(\tan^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1\right)} =$$

$$= \lim_{y \to 0} e^{\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}\cdot(\cos y - 1)} = \circledast$$



$$\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos y$$

$$\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1-\cos y \sim \frac{1}{2}y^2 \quad \text{per } y \to 0 \\ \sin y \sim y \quad \text{per } y \to 0 \end{array}}$$

$$\circledast = \lim_{y \to 0} e^{\frac{\overset{\to 1}{\cos^2 y}}{\cancel{y^2}}\left(-\frac{1}{2}\cancel{y^2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(13/11/2009) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \log(x) & \text{se } x > 1 \\ \alpha - 7 & \text{se } x = 1 \\ \frac{(e^{x-1}-1) \cdot \tan^2(x-1)}{1-\cos(x-1)} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Studiare la continuità di f in $x=1$.

- $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\sin^2\Big(\underbrace{\frac{x}{x-1}}_{\to +\infty}\Big)}_{\text{funz. limitata}} \cdot \underbrace{\log(x)}_{\substack{\text{funz. infinitesima}\\ \to 0}} = 0$$

$\uparrow$ corollario II teorema del confronto

Non esiste $\lim_{x\to 1^+} \sin^2\left(\frac{x}{x-1}\right)$, ma osserviamo che $\sin^2\left(\frac{x}{x-1}\right)$ è limitato (assume solo valori in $[0,1]$)

- $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(e^{x-1}-1)\cdot \tan^2(x-1)}{1-\cos(x-1)} =$$

$y = x-1$
se $x \to 1^-$ allora $y \to 0^-$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{(e^y-1)\cdot \tan^2 y}{1-\cos y} =$$

$\tan y \sim y$ per $y \to 0$
$1-\cos y \sim \frac{1}{2}y^2$ per $y\to 0$
$e^y - 1 \sim y$ per $y \to 0$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{y \cdot \cancel{y^2}}{\frac{1}{2}\cancel{y^2}} = 0$$

Ne segue che $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

Dato che $f(1) = \alpha - 7$,

- se $\alpha \neq 7$, allora $x = 1$ è punto di discont. eliminabile, perché $f(1) \neq 0$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
- se $\alpha = 7$, allora f è continua in $x = 1$, perché $f(1) = 0$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

(26/11/2010) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha \left[\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + \dfrac{4(e^{x-1}-1)}{2x-2}\right] & \text{se } x>1 \\ 0 & \text{se } x \le 1 \end{cases}$$

Studiare la continuità di f in $x=1$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$ $\quad$ f è continua da sinistra in $x=1$

- $y = x-1$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} y^\alpha \left[\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\cancel{4}^{\,2}(e^y-1)}{\cancel{2}y}\right]$

  $\frac{1}{y} \to +\infty$ $\qquad$ $\frac{2(e^y-1)}{y} \to 2$

  non ha limite per $y\to 0^+$, ma la funzione è limitata

$$\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1}$$

$$\lim_{y\to 0^+} y^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

Caso $\alpha>0$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \left(\underbrace{y^\alpha \cos\left(\frac{1}{y}\right)}_{\to 0} + \underbrace{y^\alpha}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{2(e^y-1)}{y}}_{\to 2} \right) = 0$$

infinitesima $\quad$ limitata

Se $\alpha > 0$, allora f è continua in $x = 1$

Caso $\alpha = 0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \left(\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{2(e^y - 1)}{y} \right) \quad \text{non esiste}$$

Se $\alpha = 0$, allora $x = 1$ è punto di discontinuità di II specie.

Caso $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \underbrace{y^\alpha}_{+\infty} \left[\underbrace{\cos\left(\frac{1}{y}\right)}_{\text{assume valori in } [-1,1]} + \underbrace{\frac{2(e^y - 1)}{y}}_{2} \right]$$

Se y è in un intorno destro di 0 sufficientemente piccolo, allora $\dfrac{2(e^y - 1)}{y}$ è in $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$, dunque

$$\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{2(e^y - 1)}{y} \quad \text{è positivo e limitato}$$

Quindi $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ e $x = 1$ è punto di infinito per f se $\alpha < 0$