Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 16 ottobre 2025

1. (Variante tema d'esame 20 giugno 2024) Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2+|x|}}\right) \cdot (\log^2 x - \log x)^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5x-1} \cdot \sqrt[5]{x-1}}.$$
Determinare il dominio di f e l'insieme $A = \{x \in \operatorname{dom}(f) : f(x) \leqslant 0\}$.

2. (Variante tema d'esame 12 gennaio 2024) Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{\left(e^{\frac{1}{x^2-3x+2}} - e\right)(\arctan x - 3)}{\log(x+3)}.$$
Determinare il dominio di f e l'insieme $A = \{x \in \operatorname{dom}(f) : f(x) \geqslant 0\}$.

3. (Tema d'esame 2 luglio 2019) Calcolare l'area della regione del piano complesso individuata dal sistema
$$\begin{cases} (\mathrm{Re} z)^2 - \dfrac{3}{2}(z+\overline{z}) + 2 \leqslant 0 \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leqslant 0 \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{z^2}{i\mathrm{Re} z}\right) \leqslant 3. \end{cases}$$

4. (Variante tema d'esame 18 ottobre 2023) Determinare le soluzioni complesse dell'equazione
$$(-i)^3 z^4 + \frac{2\left(e^{i\frac{7}{8}\pi}\right)^2 |e^{4+5i}|}{\left|\sqrt{15}+i\right|^2 (\sqrt{2}i - \sqrt{2})} = 0,$$
scriverle in forma esponenziale e rappresentarle nel piano complesso.

5. (Variante tema d'esame 10 gennaio 2013) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$\begin{cases} (|z| + \mathrm{Re}\, z)^2 (3\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z - 4) \geqslant 0 \\ |z+i-1| \leqslant \sqrt{5}. \end{cases}$$

Quesiti simili ai precedenti per ulteriore esercizio

6. Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} e^{-7x} - 1 & \text{se } x \leqslant -1 \\ \sqrt[3]{|x|-5} \cdot (4 - \log^2(x+1)) & \text{se } x > -1. \end{cases}$$
Determinare il dominio di f e l'insieme $A = \{x \in \operatorname{dom}(f) : f(x) \geqslant 0\}$.

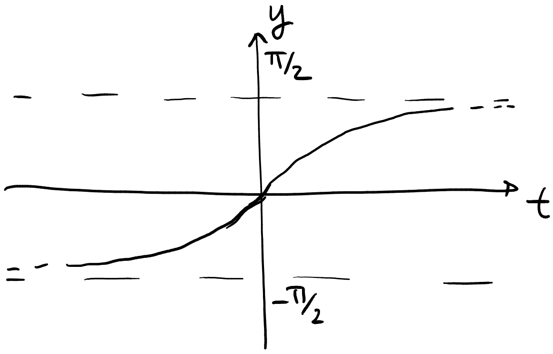
7. (Variante tema d'esame 3 febbraio 2020) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$(z^2 + 5i) \cdot \mathrm{Re}(2z(\overline{z} + 2i) - 2i(z - \overline{z}) - |z-2|^2 - 2(z+\overline{z})) = 0.$$

(Variante tema d'esame 20 giugno 2024) Si consideri la funzione $f\colon \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2+|x|}}\right) \cdot (\log^2 x - \log x)^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5x-1} \cdot \sqrt[5]{x-1}}.$$

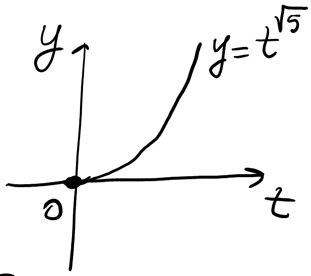
Determinare il dominio di f e l'insieme $A = \{x \in \operatorname{dom}(f) : f(x) \leqslant 0\}$.

DOMINIO DI f

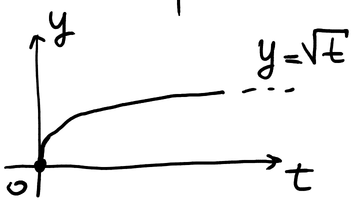


$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- $\sqrt{2+|x|}$ ha significato se e solo se $2+|x| \geq 0$
- $\sqrt{2+|x|} \neq 0$ perché è al denominatore
- $(\log^2 x - \log x)^{\sqrt{5}}$ ha significato se e solo se $\log^2 x - \log x \geq 0$

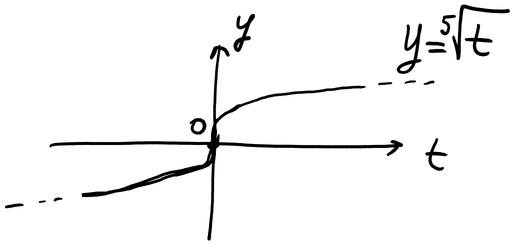


- $x > 0$ perché x è argomento del logaritmo
- $\sqrt{5x-1}$ ha significato se e solo se $5x-1 \geq 0$
- $\sqrt{5x-1} \neq 0$ perché è al denominatore



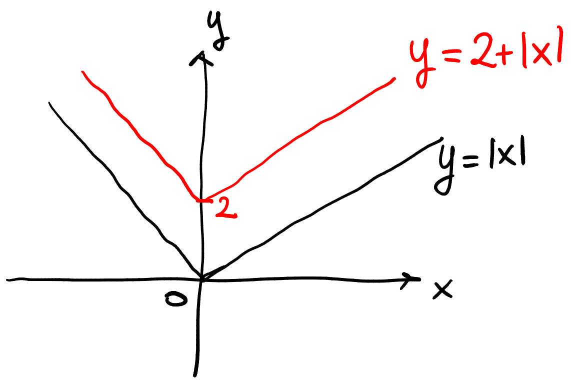
$\sqrt{5x-1} = 0 \iff 5x-1=0$

- $\sqrt[5]{x-1}$ ha significato $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[5]{x-1} \neq 0$ perché è al denominatore



$\sqrt[5]{t} = 0 \iff t = 0$

$$\begin{cases} 2+|x|>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x>0 \\ \log^2 x - \log x \geq 0 \\ 5x-1>0 \\ \sqrt[5]{x-1} \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x\leq 1 \vee x\geq e \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq 1 \end{cases}$$



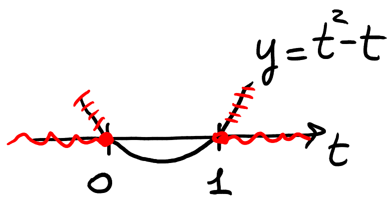
$\boxed{\text{Attenzione! } \log^2 x = (\log(x))^2 \text{ ed è diverso da } \log x^2 = \log(x^2)}$

- $\log^2 x - \log x \geq 0$

Posto $\log x = t$, si ha $t^2-t\geq 0$

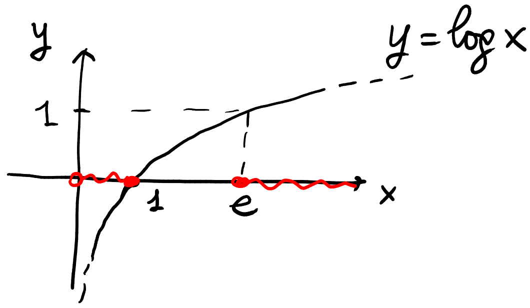
$$t(t-1)\geq 0$$

$$t\leq 0 \vee t\geq 1$$



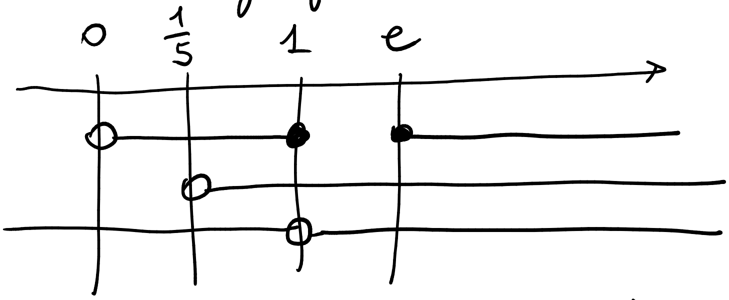
$$\log x \leq 0 \vee \log x \geq 1$$

$$0<x\leq 1 \vee x\geq e$$



- $\sqrt[5]{x-1} \neq 0 \iff x-1\neq 0 \iff x\neq 1$

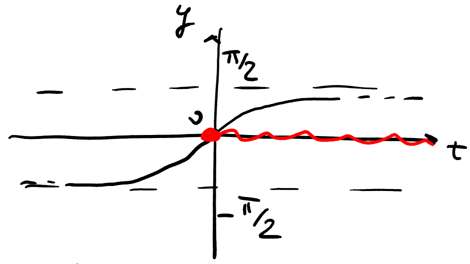
Risoluzione grafica del sistema



$$\text{dom}(f) = \left(\frac{1}{5},1\right) \cup [e,+\infty)$$

SEGNO DI f

- $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2+|x|}}\right) \geq 0$



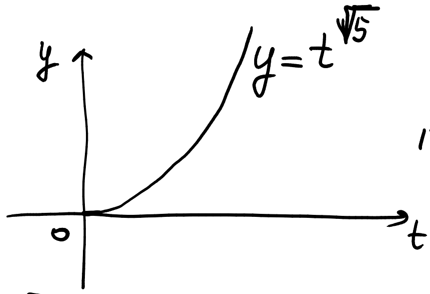
$\arctan t \geq 0 \iff t \geq 0$

$$\frac{x}{\sqrt{2+|x|}} \geq 0$$

Il denominatore è sempre positivo

$$x \geq 0$$

- $(\log^2 x - \log x)^{\sqrt{5}} \geq 0$



DOMINIO $[0,+\infty)$

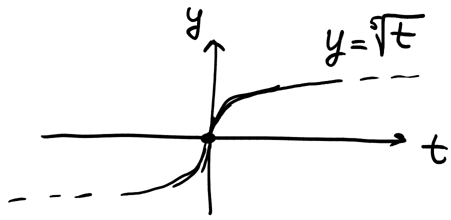
INS. IMM. $[0,+\infty)$

$t^{\sqrt{5}} \geq 0$ per ogni t nel dominio della funzione

$$\log^2 x - \log x \geq 0$$

$$0 < x \leq 1 \vee x \geq e$$

- $\sqrt{5x-1} > 0 \iff 5x-1 > 0 \iff x > \frac{1}{5}$
- $\sqrt[5]{x-1} > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$



$\sqrt[5]{t} > 0 \iff t > 0$

		0		$\frac{1}{5}$		1		e		x
$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+\lvert x\rvert}}\right)$					+				+	
$(\log^2 x - \log x)^{\sqrt{5}}$					+			0	+	
$\sqrt{5x-1}$					+				+	
$\sqrt[5]{x-1}$					−				+	
$f(x)$					−			0	+	

$$A = \left(\frac{1}{5}, 1\right) \cup \{e\}$$

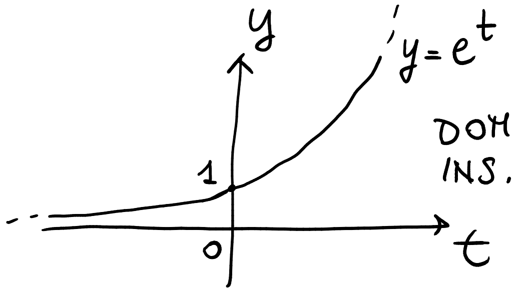
Variante tema 12/01/2024

$$f(x)=\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2-3x+2}}-e\right)(\arctan x-3)}{\log(x+3)}$$

Determinare dom(f) e

$A=\{x\in \text{dom}(f): f(x)\geq 0\}$.

DOMINIO DI f



DOMINIO $\mathbb{R}$
INS. IMM. $(0,+\infty)$

$\boxed{e^{\frac{1}{x^2-3x+2}}-e \text{ ha significato per ogni } x\in\mathbb{R} \text{ per cui l'esponente ha significato}}$

- $x^2-3x+2\neq 0$ perché è al denominatore
- $\arctan(x)-3$ è definito per ogni $x\in\mathbb{R}$
- $\log(x+3)$ ha significato se e solo se $x+3>0$
- $\log(x+3)\neq 0$ perché è al denominatore

$$\begin{cases} x^2-3x+2\neq 0 \\ x+3>0 \\ \log(x+3)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \wedge x\neq 2 \\ x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

- $x^2-3x+2\neq 0$

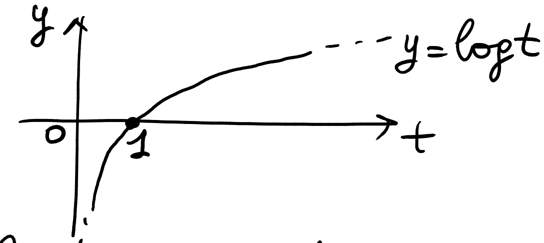
$(x-1)(x-2)\neq 0$

$x\neq 1 \wedge x\neq 2$ $\qquad \cancel{x\neq 1 \vee x\neq 2}$ NO!

- $\log(x+3) \neq 0$

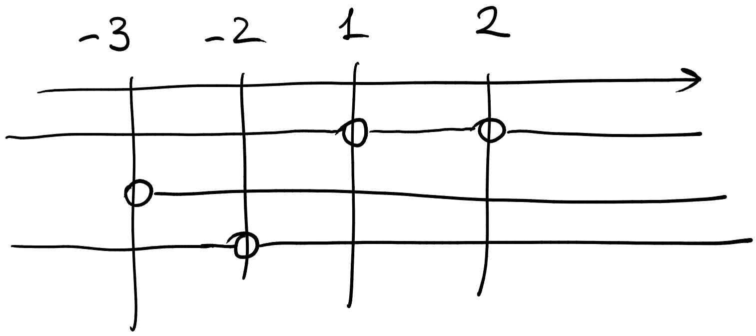
$x+3 \neq 1$

$x \neq -2$



$\log t = 0 \iff t = 1$

Risolviamo il sistema



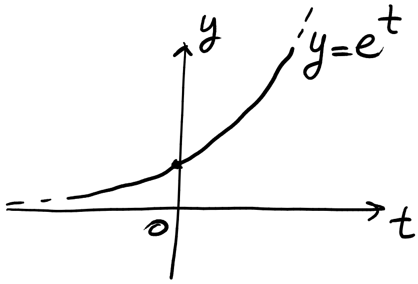
$$\mathrm{dom}(f) = (-3,-2) \cup (-2,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$$

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > -3 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2\}$$

SEGNO DI f

- $e^{\frac{1}{x^2-3x+2}} - e \geq 0$

$$e^{\frac{1}{x^2-3x+2}} \geq e$$



Funzione strett. crescente

$$\frac{1}{x^2-3x+2} \geq 1$$

$$\frac{1-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+3x-1}{x^2-3x+2} \geq 0$$

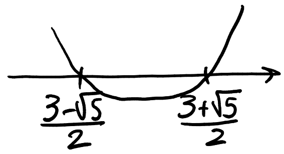
$-x^2+3x-1 \geq 0$

$x^2-3x+1 \leq 0$

$x^2-3x+1=0$

$\Delta = 9-4 = 5$

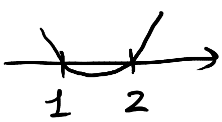
$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$



$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$x^2-3x+2 > 0$

$x < 1 \vee x > 2$



x		$\frac{3-\sqrt5}{2}$		1		2		$\frac{3+\sqrt5}{2}$	
	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

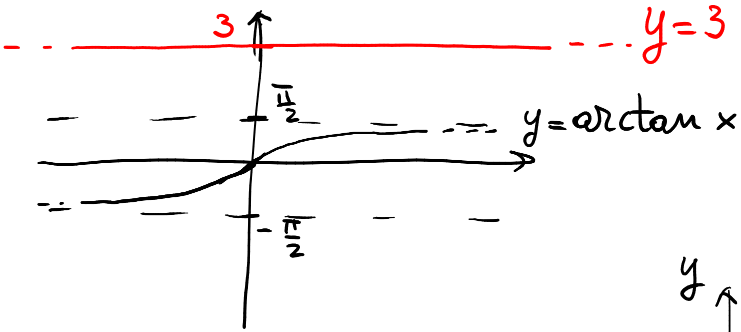
$$e^{\frac{1}{x^2-3x+2}} - e \geq 0$$

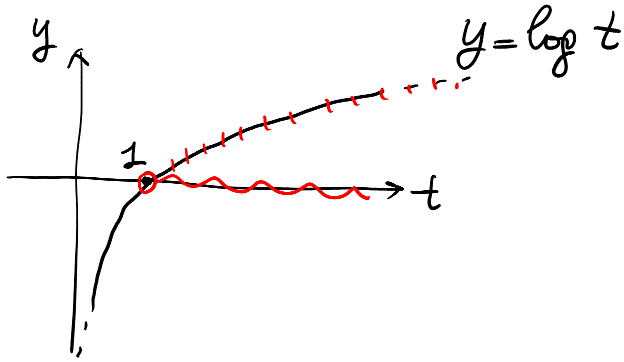
$$\frac{3-\sqrt5}{2} \leq x < 1 \vee 2 < x \leq \frac{3+\sqrt5}{2}$$

• $\arctan(x) - 3 \geq 0 \iff \arctan(x) \geq 3$ non si verifica per nessun $x \in \mathbb{R}$

cioè

$$\arctan(x) - 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$





• $\log(x+3) > 0$

$x + 3 > 1$

$x > -2$

	-3		-2		$\frac{3-\sqrt5}{2}$		1		2		$\frac{3+\sqrt5}{2}$	
$\left(e^{\frac{1}{x^2-3x+2}} - e\right)$		$-$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	0	$-$
$\arctan(x)-3$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$\log(x+3)$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$		$-$	0	$+$

$$A = \left(-2, \frac{3-\sqrt5}{2}\right] \cup (1,2) \cup \left[\frac{3+\sqrt5}{2}, +\infty\right)$$

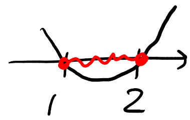
Tema d'esame 02/07/2019

Calcolare l'area della regione di piano individuata dal sistema

$$\begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 - \frac{3}{2}(z+\bar{z}) + 2 \leq 0 \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 0 \\ \operatorname{Re}\left(\frac{z^2}{i \operatorname{Re} z}\right) \leq 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$(x-1)(x-2) \leq 0$$



$z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

- $(\operatorname{Re} z)^2 - \frac{3}{2}(z+\bar{z}) + 2 \leq 0$

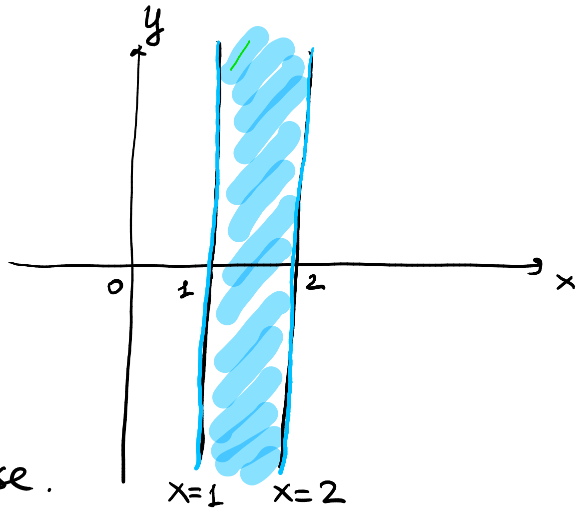
$$x^2 - \frac{3}{2}(x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}) + 2 \leq 0$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$(x-1)(x-2) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 2$$

La disequazione rappresenta la striscia delimitata dalle rette $x=1$ e $x=2$, rette incluse.



- $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 0$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\right) \leq 0$$

$$\boxed{(x, y) \neq (0, 0)}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}\right)\leq 0$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)\leq 0$$

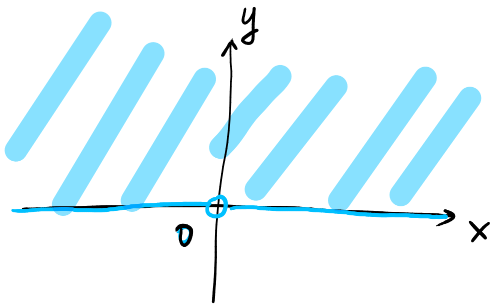
$$\operatorname{Im}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\leq 0$$

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\leq 0$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per x^2+y^2, che è positivo perché abbiamo posto $(x,y)\neq(0,0)$

$$-y\leq 0$$

$$y\geq 0$$



• $$\operatorname{Re}\left(\frac{z^2}{i\operatorname{Re} z}\right)\leq 3$$

$$\boxed{x\neq 0}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(x+iy)^2}{ix}\right)\leq 3$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x^2+2ixy-y^2}{ix}\cdot\frac{i}{i}\right)\leq 3$$

$$i\cdot i=-1$$

$$i\cdot(-i)=1$$

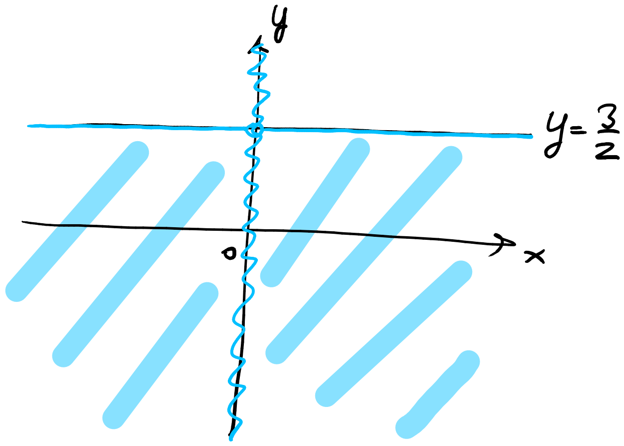
$$\operatorname{Re}\left(\frac{ix^2-2xy-iy^2}{-x}\right)\leq 3$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-2xy}{-x}+i\,\frac{x^2-y^2}{-x}\right)\leq 3$$

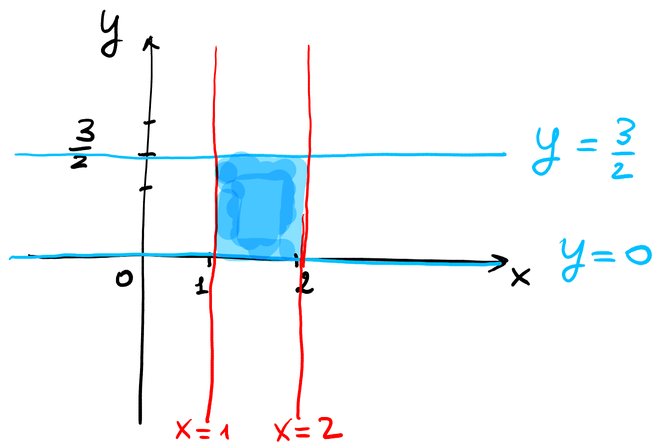
$$\frac{-2xy}{-x} \leq 3$$

$$2y \leq 3$$

$$y \leq \frac{3}{2}$$



$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ y \geq 0 \wedge (x,y) \neq (0,0) \\ y \leq \frac{3}{2} \wedge x \neq 0 \end{cases}$$



La regione di piano individuata dal sistema è $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{3}{2}\}$, quindi ha area $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Variante tema esame 18/02/2023

Determinare le soluzioni complesse di

$$(-i)^3 z^4 + \frac{2\left(e^{i\frac{7}{8}\pi}\right)^2 \left|e^{4+5i}\right|}{\left|\sqrt{15}+i\right|^2\left(\sqrt{2}i-\sqrt{2}\right)} = 0,$$

scriverle in forma esponenziale e rappresentarle nel piano complesso.

$$(-i)^3 = (-i)^2\cdot(-i) = -1\cdot(-i) = i$$

$$i z^4 + \frac{2e^{i\frac{7}{4}\pi}\left|e^4\cdot e^{5i}\right|}{(15+1)\left(\sqrt{2}i-\sqrt{2}\right)} = 0$$

$$\boxed{\left(e^{z}\right)^n = e^{nz} \quad \forall z\in\mathbb{C} \quad \forall n\in\mathbb{Z}}$$

- $\left|e^{4+5i}\right| = \left|e^4\cdot e^{5i}\right| = \left|e^4\right|\cdot\left|e^{5i}\right| = e^4\cdot 1 = e^4$

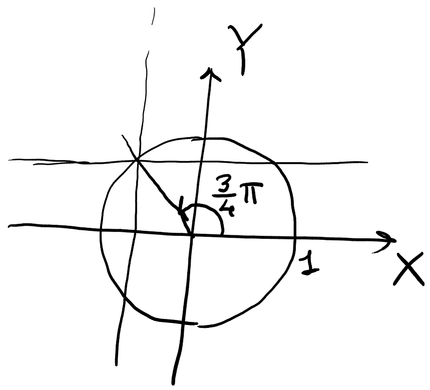
$$\boxed{\left|e^{i\vartheta}\right| = 1 \quad \forall\vartheta\in\mathbb{R}}$$

- Scrivo in forma esponenziale $\sqrt{2}i-\sqrt{2}$

$$\left|\sqrt{2}i-\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2}i-\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$\begin{cases}\cos\vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \qquad \vartheta = \frac{3}{4}\pi \text{ va bene}$$

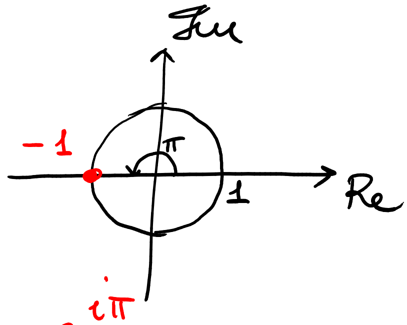


$$\boxed{\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$$

$$i z^4 + \frac{\cancel{2} e^{i\frac{7}{4}\pi} \cdot e^4}{16 \cdot \cancel{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}} = 0$$

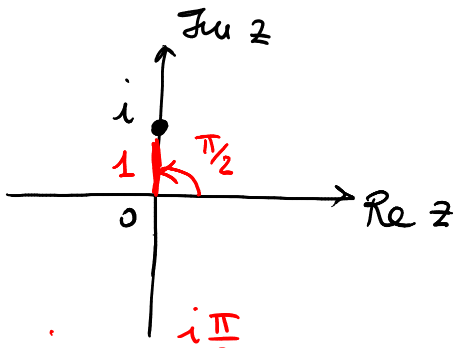
$$i z^4 + \frac{e^4}{16} \cdot e^{i\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}\right)\pi} = 0$$

$$i z^4 + \frac{e^4}{16} \cdot e^{i\pi} = 0$$



$$e^{i\pi} = -1$$

$$i z^4 = \frac{e^4}{16}$$



$$e^{i\frac{\pi}{2}} z^4 = \frac{e^4}{16}$$

Moltiplico entrambi i membri per $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$z^4 = \frac{e^4}{16} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Risolvere l'equazione significa calcolare le radici quarte complesse di $w = \underbrace{\boxed{\frac{e^4}{16}}}_{= \rho} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $-i\frac{\pi}{2} = \vartheta$

$$r = \sqrt[4]{\frac{e^4}{16}} = \frac{e}{2}$$

$$\varphi_k = \frac{\vartheta}{4} + \frac{2k\pi}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

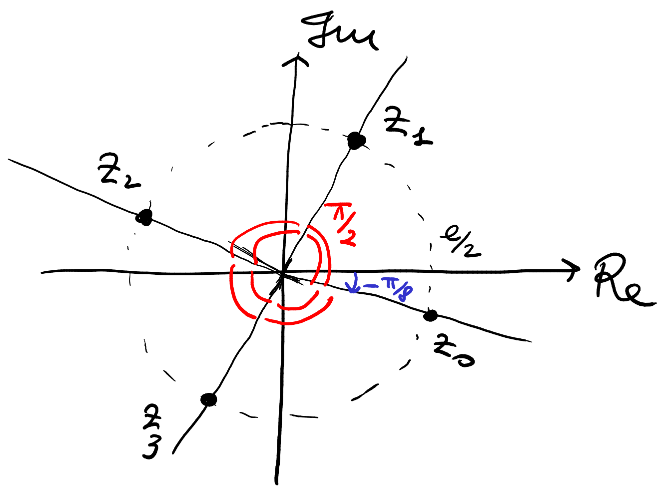
$$\varphi_0 = \frac{-\frac{\pi}{2}}{4} = -\frac{\pi}{8} \qquad \varphi_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{8}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{7}{8}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{11}{8}\pi$$

Le quattro radici sono

$$z_0 = \frac{e}{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}, \qquad z_1 = \frac{e}{2}\cdot e^{i\frac{3}{8}\pi},$$

$$z_2 = \frac{e}{2}\cdot e^{i\frac{7}{8}\pi}, \qquad z_3 = \frac{e}{2}\cdot e^{i\frac{11}{8}\pi}$$



Variante tema 10/01/2013

Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (|z| + \operatorname{Re} z)^2 (3\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z - 4) \geq 0 \\ |z+i-1| \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$|z+i-1| \leq \sqrt{5}$$

$$\underbrace{|z-(1-i)|}_{} \leq \sqrt{5}$$

Distanza fra un generico $z \in \mathbb{C}$ e $(1-i)$

La disequazione rappresenta il cerchio di centro $1-i$ e raggio $\sqrt{5}$, circonferenza inclusa

Osservazione. Posto $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$$|z+i-1| = |x+iy+i-1| = |(x-1)+i(y+1)| =$$

$$= \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

La disequazione $|z+i-1| \leq \sqrt{5}$ si può riscrivere come $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \leq \sqrt{5}$

$$(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 5$$

Questi conti non servono se si fa riferimento al significato geometrico del modulo.

$$\left(|z|+\mathrm{Re}\,z\right)^2\left(3\,\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z-4\right)\geq 0 \qquad z=x+iy \text{ con } x,y\in\mathbb{R}$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2\left(3x-y-4\right)\geq 0$$

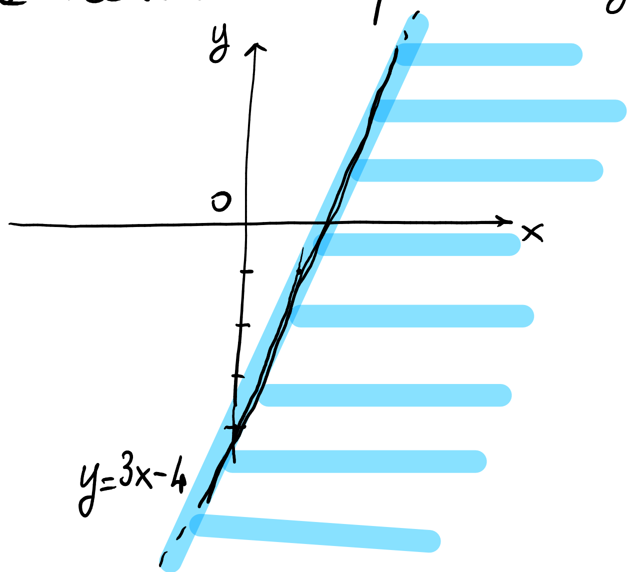
$$\boxed{A^2\cdot B\geq 0 \iff A=0 \ \vee\ B\geq 0 \quad \forall A,B\in\mathbb{R}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=0 \quad \vee \quad 3x-y-4\geq 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=-x \qquad\qquad y\leq 3x-4$$

Questa disequazione rappresenta il semipiano "al di sotto" della retta di equazione $y=3x-4$

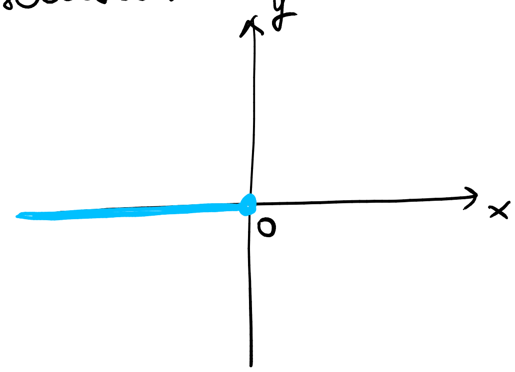
$$\begin{cases}-x\geq 0\\ x^2+y^2=(-x)^2\end{cases}$$

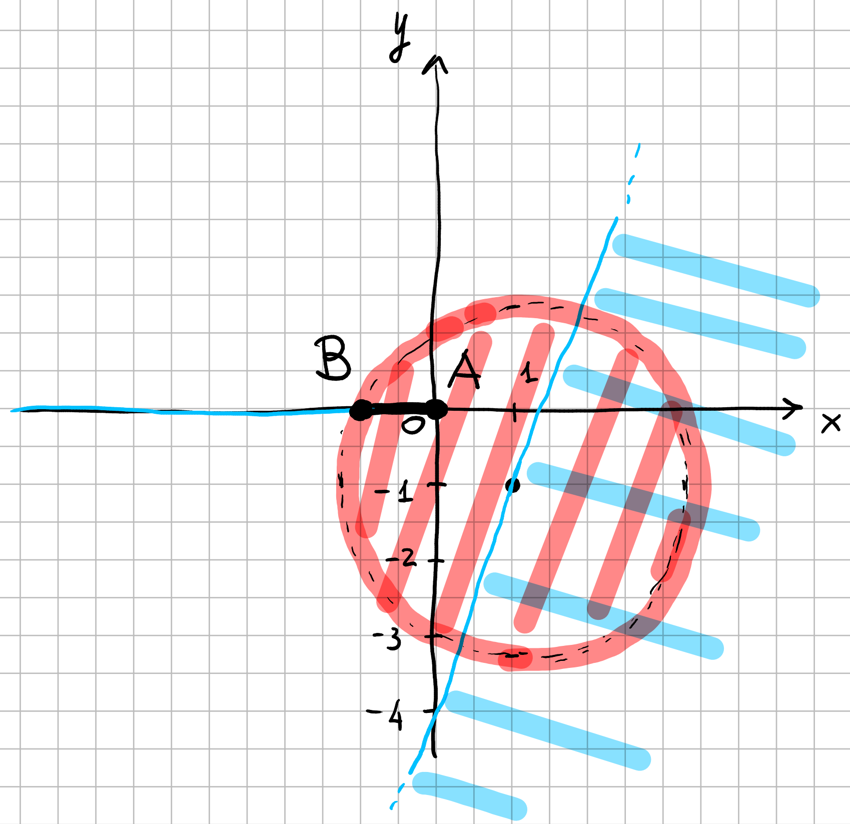


$$\begin{cases}x\leq 0\\ \cancel{x^2}+y^2=\cancel{x^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\leq 0\\ y=0\end{cases}$$

Il sistema rappresenta la semiretta azzurra





L'intersezione fra il cerchio e l'insieme formato da semiretta e semipiano è data dall'unione di un semicerchio (il semicerchio "al di sotto" di $y = 3x - 4$) e il segmento AB in figura