Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 9 ottobre 2025

1. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}$.

2. Calcolare i limiti $\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x^4)$ e $\lim_{x\to-\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x^4)$.

3. Calcolare i limiti $\lim_{x\to0^+}[x]$ e $\lim_{x\to0^-}[x]$.

4. Calcolare i limiti $\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}$.

5. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty}(5\log(x)-3x)$.

6. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5-7x^2-x+5}{6x^5+2x^3+3x-9}$.

7. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to-\infty}[(3x-2x^5)(x^{10}+4x^3)],\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{(3-2x)(3x+5)(4x^8-6)}{x-3x^{10}+2},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^5-3x+1)(5x^4-3x^6-2)}{4x^{12}-5x+1}.$$

8. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty}(5^x-e^x)$.

9. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-7^x}{x^3}$.

10. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty}\sinh x$ e $\lim_{x\to+\infty}\sinh x$.

11. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty}\cosh x$ e $\lim_{x\to+\infty}\cosh x$.

12. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}$.

13. Calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4-x}-\sqrt{-3-x})$.

Conclusione dell'esercitazione dell'8 ottobre 2025

Determinare le radici cubiche complesse, scritte in forma esponenziale, di

$$w = \frac{2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}(7+7i)(1-i)^{40}}{2i^{32}+e^{3i\pi}}$$

Scrivere w in forma esponenziale

$$w = 7\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Risolvere $z^3 = \underbrace{7\sqrt{2}}_{=\rho}\, e^{i\overbrace{\frac{\pi}{4}}^{=\vartheta}}$ in $\mathbb{C}$

$$r = \sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}$$

$$\varphi_k = \frac{\vartheta}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$\varphi_0 = \frac{\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{12}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi = \frac{9}{12}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

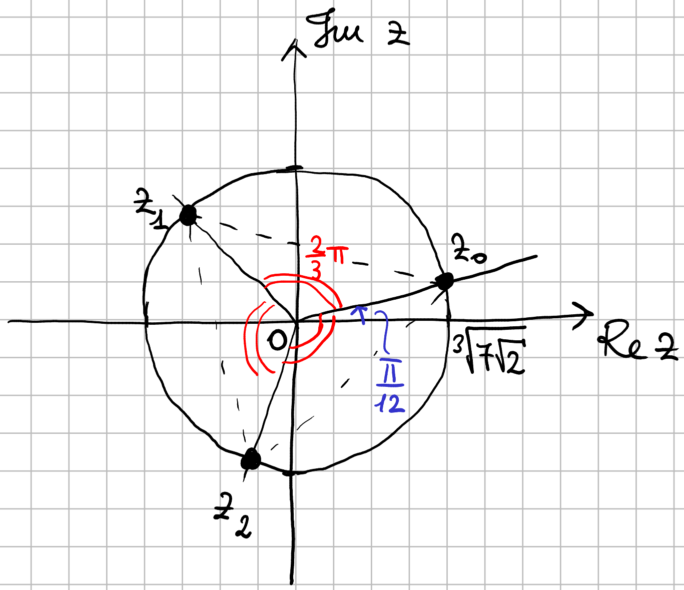
$$\varphi_2 = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{17}{12}\pi$$

Le radici cubiche complesse di w sono

$$z_0 = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

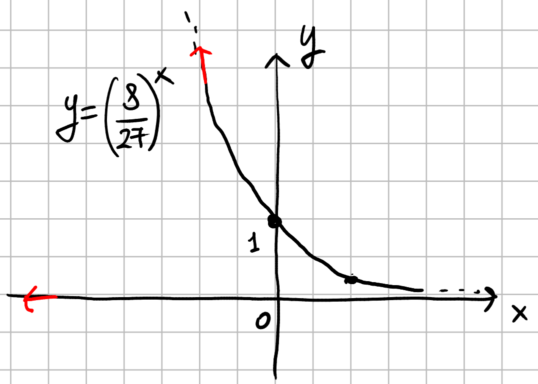
$$z_2 = \sqrt[3]{7\sqrt{2}}\, e^{i\frac{17}{12}\pi}$$



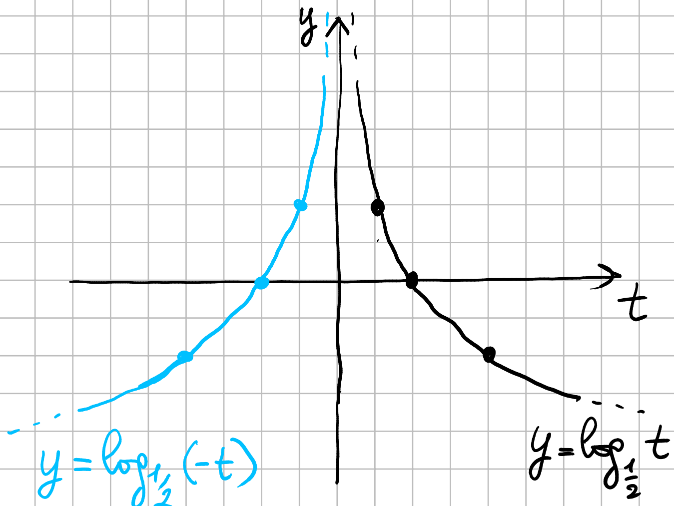
z_0, z_1, z_2 appartengono alla circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt[3]{7\sqrt{2}}$, e sono vertici di un triangolo equilatero

Calcolare $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{27}\right)^x = +\infty$$



Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x^4)$ e $\lim_{x\to-\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x^4)$



Algebra dei limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x^4) = \lim_{x\to+\infty} 4\cdot\log_{\frac{1}{2}}(|x|) = \lim_{x\to+\infty} 4\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x) =$$

$\log_{\frac{1}{2}} A^B = B\log_{\frac{1}{2}} A$ se $A>0$

$$= 4\cdot(-\infty) = -\infty$$

Algebra dei limiti

$$\lim_{x\to-\infty}\log_{\frac{1}{2}}(x^4) = \lim_{x\to-\infty} 4\cdot\log_{\frac{1}{2}}(|x|) = \lim_{x\to-\infty} 4\cdot\log_{\frac{1}{2}}(-x) = 4\cdot(-\infty)$$

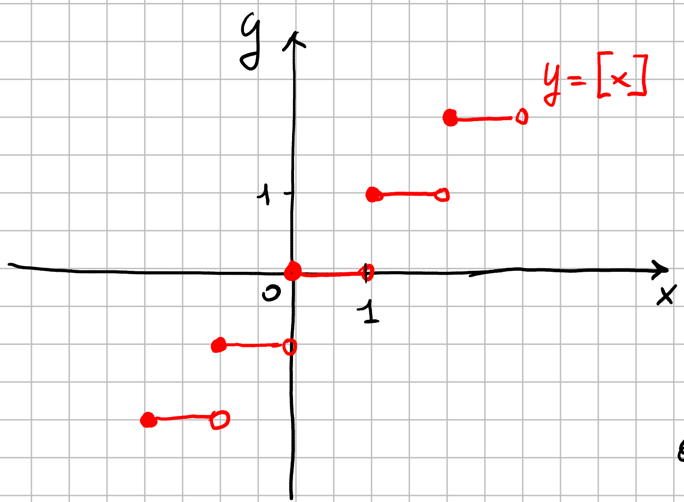
$|x| = -x$ se $x<0$

$$= -\infty$$

Osservazione. La funzione $f(x)=\log_{1/2}(x^4)$ ha dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è pari. Quindi i limiti per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$ coincidono.

Calcolare $\lim_{x\to 0^+}[x]$ e $\lim_{x\to 0^-}[x]$

Se $x\in\mathbb{R}$, si definisce parte intera di x è il massimo intero $\leq x$



$\lim_{x\to 0^+}[x]=0$

$\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$

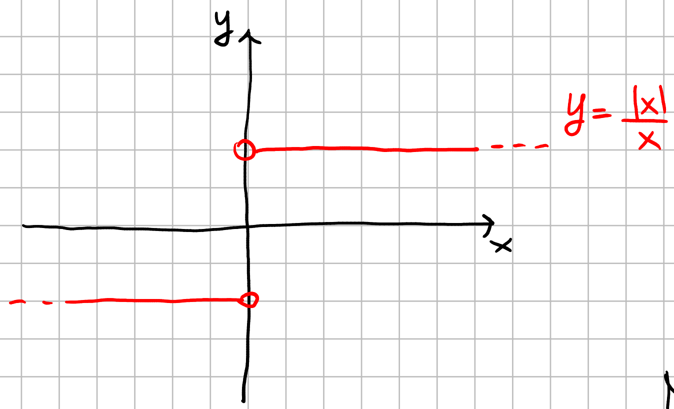
quindi non esiste $\lim_{x\to 0}[x]$

Calcolare $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

$$|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x} & \text{se } x>0 \\ \frac{-x}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Osservazione. $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}$ per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

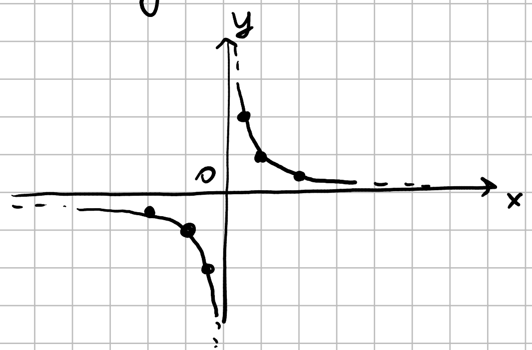
Non esiste $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

CONFRONTO DI INFINITI (slide limiti2.pdf
p. 9 già vista a lezione
pp. 10-11 in questa esercitazione)

- $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x$

f ha ordine di infinito superiore rispetto a g per $x \to +\infty$, perché

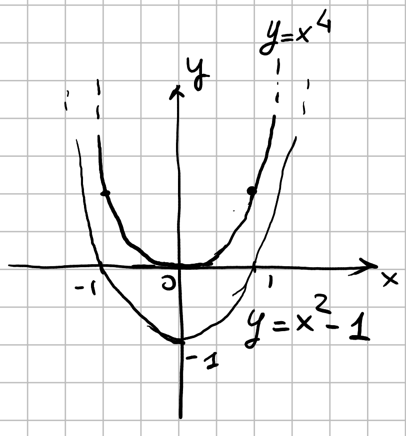
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) \overset{AL}{=} +\infty - 0 =$$
$$= +\infty$$



Definizione. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f e g funzione definite in un intorno di x_0, escluso eventualmente x_0.
Se f e g sono infinite per $x \to x_0$,
si dice che f HA ORDINE DI INFINITO INFERIORE RISPETTO A g per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

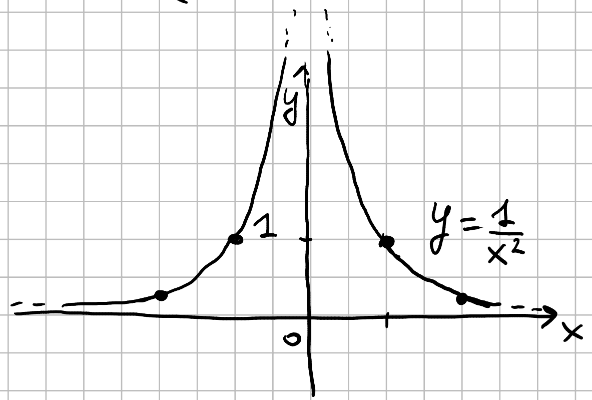
Esempi



- $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^4$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^4} =$$

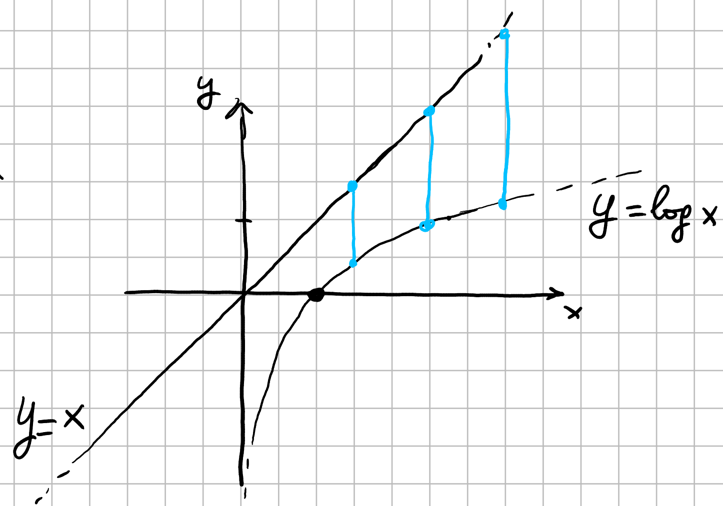
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) \overset{AL}{=} 0 - 0 = 0$$



Quindi f ha ordine di infinito inferiore rispetto a g per $x \to -\infty$.

- $f(x) = \log x$, $g(x) = x$

f ha ordine di infinito inferiore rispetto a g per $x \to +\infty$



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0}$$

IN GENERALE, VALE IL LIMITE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha > 0$$

Attenzione! Se $\alpha < 0$, allora x^α è una funzione infinitesima per $x \to +\infty$

Esempio con $\alpha = -\frac{1}{5}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^{-\frac{1}{5}}} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^{1/5}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\log(x)}_{+\infty} \overset{AL}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

(<u>non</u> è una forma indeterminata)

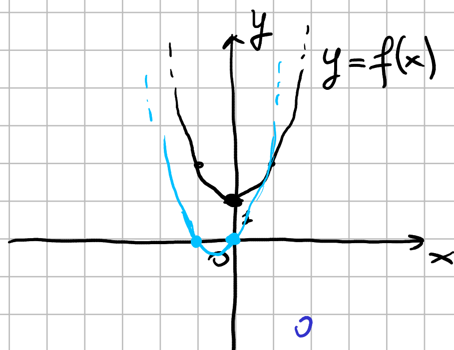
<u>Definizione</u>. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano f e g sono funzioni definite in un intorno di x_0, escluso eventualmente x_0. Se f e g sono infinite per $x \to x_0$, si dice che f e g HANNO LO STESSO ORDINE DI INFINITO per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In questo caso, si scrive: $f(x) \sim \ell \cdot g(x)$ per $x \to x_0$

<u>Esempi</u>

- $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 + x$



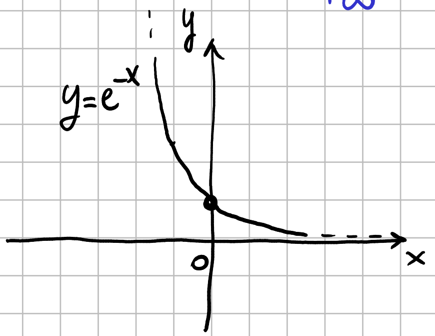
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x^2 + 1}^{+\infty}}{\underbrace{x^2 + x}_{+\infty}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} \overset{AL}{=} \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$(x^2 + 1) \sim (x^2 + x) \quad \text{per } x \to +\infty$$

• $f(x)=2e^x, \quad g(x)=e^x+2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{\to+\infty}{2e^x}}{\underset{\to+\infty}{e^x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1+2e^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+2\underset{\downarrow \atop 0}{e^{-x}}}\overset{AL}{=}\frac{2}{1+2\cdot 0}=2$$



$$2e^x \sim 2\cdot(e^x+2) \quad \text{per } x\to+\infty$$

Calcolare $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5-7x^2-x+5}{6x^5+2x^3+3x-9}$

(Dai grafici delle funzioni elementari o da algebra limiti)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5-7x^2-x+5}{6x^5+2x^3+3x-9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^5}\left(2-\overset{0}{\frac{7}{x^3}}-\overset{0}{\frac{1}{x^4}}+\overset{0}{\frac{5}{x^5}}\right)}{\cancel{x^5}\left(6+\underset{0}{\frac{2}{x^2}}+\underset{0}{\frac{3}{x^4}}-\underset{0}{\frac{9}{x^5}}\right)}\overset{AL}{=}\frac{1}{3}$$

Il numeratore e il denominatore hanno lo stesso ordine di infinito per $x\to-\infty$

IN GENERALE, una funzione polinomiale ha lo stesso ordine di infinito del suo monomio di grado massimo per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.

Se $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$ con $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ e $a_n\neq 0$, allora

$$f(x) \sim a_n x^n \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e per } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^n}\left(a_n + \overset{\to 0}{\frac{a_{n-1}}{x}} + \dots + \overset{\to 0}{\frac{a_1}{x^{n-1}}} + \overset{\to 0}{\frac{a_0}{x^n}}\right)}{a_n \cancel{x^n}} \overset{AL}{=} \frac{a_n}{a_n} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Siano } f_1, f_2, g_1, g_2 \text{ infinite per } x \to x_0 \\ \text{Se } f_1 \sim f_2 \text{ e } g_1 \sim g_2 \text{ per } x \to x_0, \text{ allora} \\ \qquad f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \quad \text{e} \quad \dfrac{f_1}{g_1} \sim \dfrac{f_2}{g_2} \quad \text{per } x \to x_0 \end{array}}$$

Calcolare $\lim_{x \to -\infty} \left[(3x - 2x^5) \cdot (x^{10} + 4x^3)\right]$

$3x - 2x^5 \sim -2x^5$ per $x \to -\infty$

$x^{10} + 4x^3 \sim x^{10}$ per $x \to -\infty$

Quindi $(3x - 2x^5)(x^{10} + 4x^3) \sim -2x^5 \cdot x^{10} = -2x^{15}$ per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(3x - 2x^5)(x^{10} + 4x^3)\right] = \lim_{x \to -\infty} (-2x^{15}) \overset{AL}{=} -2 \cdot (-\infty) = +\infty$$

Calcolare $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\overset{\sim -2x}{(3-2x)}\overset{\sim 3x}{(3x+5)}\overset{\sim 4x^8}{(4x^8-6)}}{\underbrace{x - 3x^{10} + 2}_{\sim -3x^{10}}} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x \cdot \cancel{3}x \cdot 4x^8}{-\cancel{3}x^{10}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8x^{10}}{x^{10}} = 8$$

Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\overbrace{2x^5-3x+1}^{\sim 2x^5})(\overbrace{5x^4-3x^6-2}^{\sim -3x^6})}{\underbrace{4x^{12}-5x+1}_{\sim 4x^{12}}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2}^{1}x^5(-3x^6)}{{}_{2}\cancel{4}x^{12}} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}\cdot \underbrace{x^{-1}}_{\downarrow\, 0}\right) \overset{AL}{=} -\frac{3}{2}\cdot 0 = 0$$

Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{5\log(x)}_{\downarrow\, +\infty} - \underbrace{3x}_{\downarrow\, +\infty})$

È una forma indeterminata $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(5\log(x)-3x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(5\underbrace{\boxed{\frac{\log(x)}{x}}}_{\downarrow\, 0}-3\right) \overset{AL}{=}$$

$$= +\infty(5\cdot 0-3) = -\infty$$

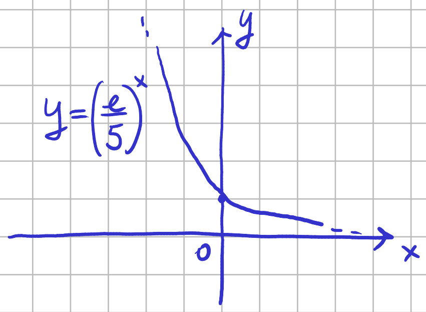
Osservazione $\quad 5\log(x)-3x \sim -3x$ per $x\to+\infty$

(Questo deriva dal calcolo precedente)

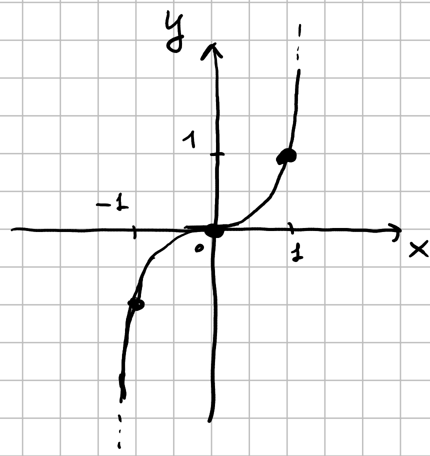
Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{5^x}_{\downarrow\, +\infty} - \underbrace{e^x}_{\downarrow\, +\infty})$

$$\lim_{x\to+\infty}(5^x-e^x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{5^x}_{\downarrow\, +\infty}\left(1-\underbrace{\left(\frac{e}{5}\right)^x}_{\downarrow\, 0}\right) \overset{AL}{=} +\infty$$

$0<\frac{e}{5}<1$



Abbiamo ricavato che
$5^x - e^x \sim 5^x$ per $x \to +\infty$



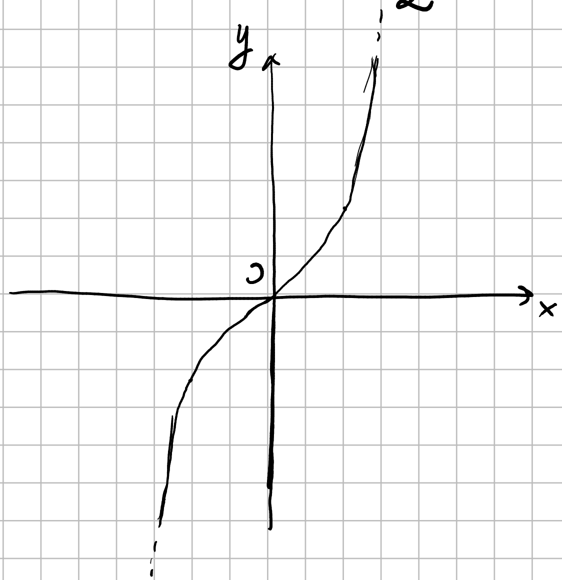
Calcolare $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-7^x}{x^3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^x}-\overset{\to 0}{7^x}}{\underset{\to -\infty}{x^3}} \overset{AL}{=} 0$$

<u>NON</u> è una forma indeterminata

SENO IPERBOLICO

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$



DOMINIO $\mathbb{R}$

INSIEME IMMAGINE $\mathbb{R}$

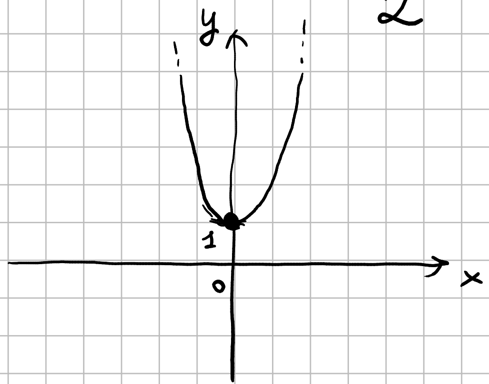
È UNA FUNZIONE DISPARI
(esercizio)

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{e^{x}} - \overset{0}{e^{-x}}}{2} \overset{AL}{=} +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$ perché la funzione è dispari

COSENO IPERBOLICO

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



DOMINIO $\mathbb{R}$

INSIEME IMMAGINE $[1, +\infty)$

È UNA FUNZIONE PARI
(esercizio)

RELAZIONE FONDAMENTALE FRA SENO IPERBOLICO E COSENO IPERBOLICO

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Esercizio: verificare questa relazione

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{e^x} + \overset{\to 0}{e^{-x}}}{2} \overset{AL}{=} +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = +\infty \quad \text{perché la funzione è pari}$$

Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$$

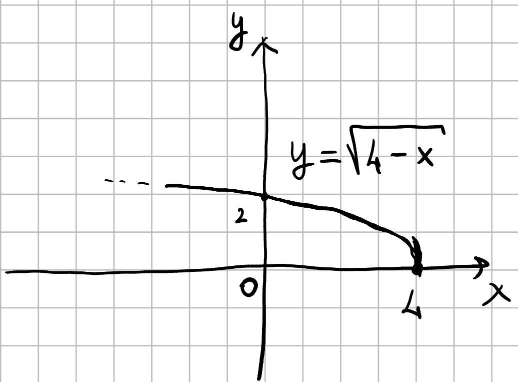
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \overset{\to 0}{e^{-2x}}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \underset{\to 0}{e^{-2x}}\right)} \overset{AL}{=} 1$$

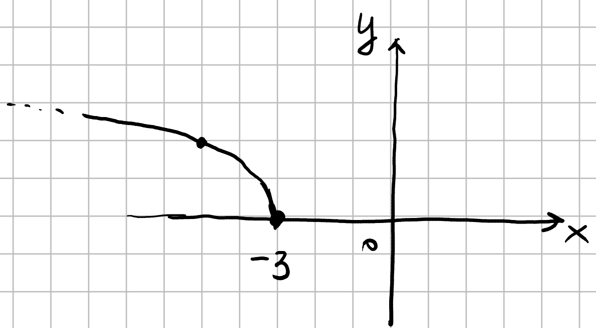
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{e^{-x}}(\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)} \overset{AL}{=} \frac{-1}{1} = -1$$

Osservazione. $f(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ è una funzione dispari, quindi si può evitare uno dei due conti sopra.

Calcolare $\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{\sqrt{4-x}}_{\downarrow\, +\infty} - \underbrace{\sqrt{-3-x}}_{\downarrow\, +\infty})$





$$(A-B)(A+B) = A^2-B^2 \quad \forall A,B\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\underbrace{\sqrt{4-x}}^{A} - \underbrace{\sqrt{-3-x}}^{B}) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{4-x}-\sqrt{-3-x}) \cdot \frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{-3-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{-3-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4-x-(-3-x)}{\sqrt{4-x}+\sqrt{-3-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{\underbrace{\sqrt{4-x}}_{\downarrow\,+\infty}+\underbrace{\sqrt{3-x}}_{\downarrow\,+\infty}} \overset{AL}{=} \frac{7}{+\infty} = 0$$