Analisi Matematica 1 – Esercitazione dell'8 ottobre 2025

1. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^5 + 3^{3/2} = -3i$.

2. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 + 4 = 3z$.

3. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 - iz + \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$.

4. (Tema d'esame 3 settembre 2012) Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ appartenenti all'intersezione $A \cap B$, dove
$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2}|\operatorname{Re} z| < 0\right\}.$$

5. (Simile al tema d'esame 8 luglio 2025) Sia $w \in \mathbb{C}$ la soluzione del sistema
$$\begin{cases} |w| = 4 \\ \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Re}(w) = 0 \\ \operatorname{Re}(w) < 0. \end{cases}$$
Calcolare le radici quarte complesse di w, scriverle in forma esponenziale e rappresentarle nel piano complesso.

6. (Tema d'esame 3 settembre 2009) Calcolare le radici complesse dell'equazione $z^4 - i|i-1|^2 z = 0$.

7. (Tema d'esame 16 aprile 2019) Determinare le radici cubiche del numero complesso
$$w = \frac{2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}(7+7i)(1-i)^{40}}{2i^{32} + e^{3i\pi}},$$
lasciando scritte le radici in forma esponenziale.

8. (*Esercizio di approfondimento facoltativo*) Sia $n \geqslant 2$ un numero naturale. Dimostrare che le soluzioni complesse dell'equazione $(z-1)^n = z^n$ hanno parte reale $\frac{1}{2}$.

Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^5 + 3^{3/2} = -3i$.

$$z^5 = -3^{3/2} - 3i$$

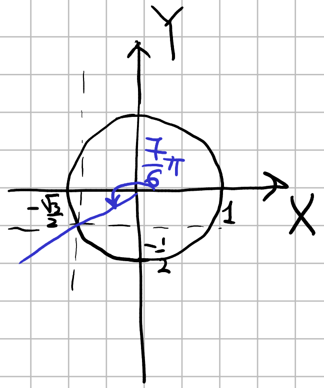
Con le notazioni delle slide
$n = 5$
$w = -3^{3/2} - 3i$

Risolvere l'equazione in $\mathbb{C}$ significa determinare le radici quinte complesse di $w = -3^{3/2} - 3i$

- Scriviamo w in forma esponenziale

$$\rho = |w| = \sqrt{(-3^{3/2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3^3 + 3^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\boxed{-3^{3/2}} \leftarrow \text{Re } w}{\boxed{6} \leftarrow |w|} \\ \\ \sin\vartheta = \dfrac{\boxed{-3} \leftarrow \text{Im } w}{\boxed{6} \leftarrow |w|} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\vartheta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\vartheta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Quindi $w = 6e^{i\frac{7}{6}\pi}$

- Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^5 = 6e^{i\frac{7}{6}\pi}$

Le soluzioni hanno modulo $r = \sqrt[5]{6}$ e i loro argomenti sono $\varphi_k = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n} = \dfrac{\vartheta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$

$$\varphi_0 = \frac{\frac{7}{6}\pi}{5} = \frac{7}{30}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{31}{30}\pi + \boxed{\frac{2}{5}\pi} = \frac{43}{30}\pi$$

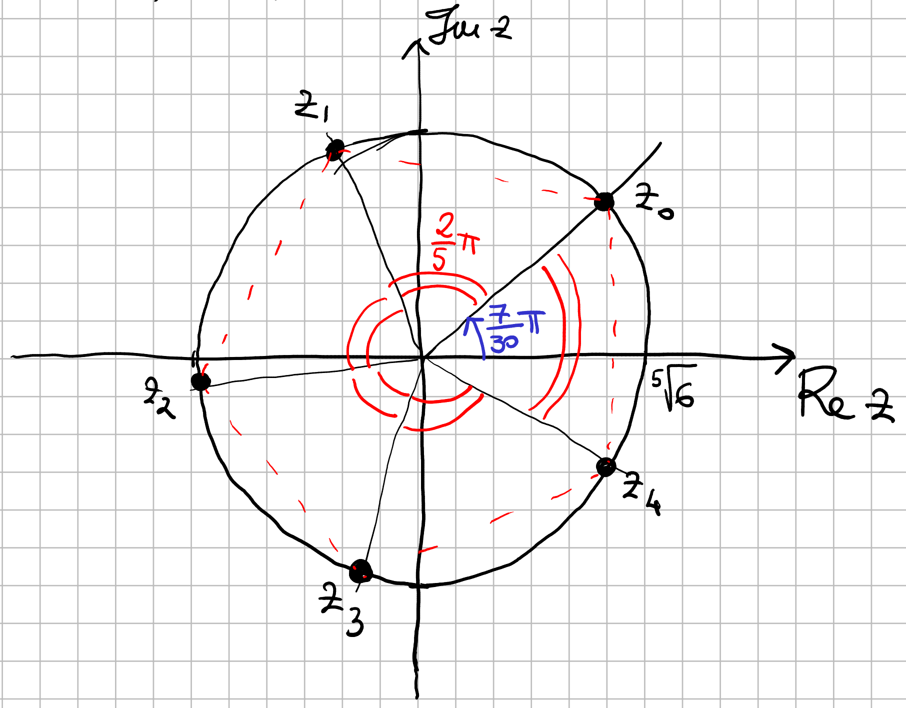
$$\varphi_1 = \frac{7}{30}\pi + \boxed{\frac{2\pi}{5}} = \frac{19}{30}\pi \qquad \varphi_4 = \frac{43}{30}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{55}{30}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{19}{30}\pi + \boxed{\frac{2}{5}\pi} = \frac{31}{30}\pi$$

Le cinque radici complesse dell'equazione sono

$$z_0 = \sqrt[5]{6}\, e^{i\frac{7}{30}\pi}, \quad z_1 = \sqrt[5]{6}\, e^{i\frac{19}{30}\pi}, \quad z_2 = \sqrt[5]{6}\, e^{i\frac{31}{30}\pi},$$

$z_3 = \sqrt[5]{6}\, e^{i\frac{43}{30}\pi}$, $z_4 = \sqrt[5]{6}\, e^{i\frac{11}{6}\pi}$



Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2+4=3z$

$$z^2-3z+4=0$$

Considariamo un'equazione polinomiale di 2° grado della forma $az^2+bz+c=0$, con $a,b,c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Se $\Delta = b^2-4ac$ e w_0, w_1 sono le due radici quadrate complesse di Δ, allora l'equazione $az^2+bz+c=0$ ha soluzioni

$$z_0 = \frac{-b+w_0}{2a} \quad e \quad z_1 = \frac{-b+w_1}{2a}$$

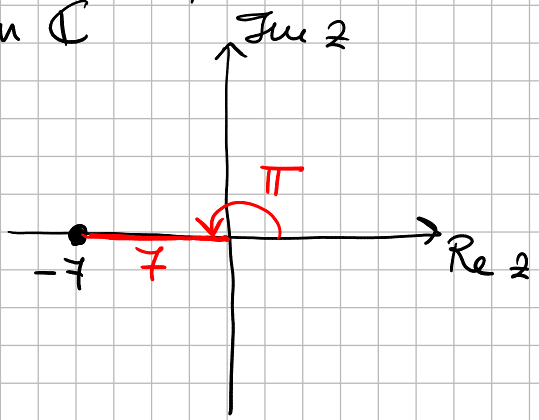
$z^2-3z+4=0$ $\qquad$ $a=1,\ b=-3,\ c=4$

$\Delta = (-3)^2-4\cdot 1\cdot 4 = -7$

Calcoliamo le radici quadrate complesse di Δ, cioè risolviamo $w^{\textcircled{2}} = -7$ in $\mathbb{C}$

$-7 = 7e^{i\textcircled{\pi}} \leftarrow \vartheta$

$n=2$



Risolviamo in $\mathbb{C}$

$w^2 = 7e^{i\pi}$

Le soluzioni hanno modulo $\sqrt{7}$ e hanno argomenti

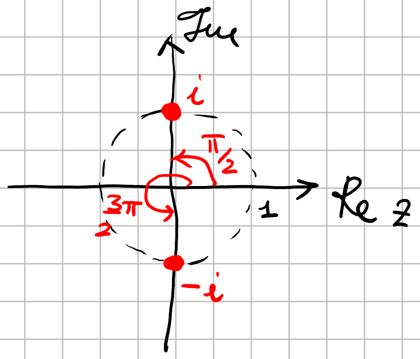
$$\boxed{\varphi_k = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0,1,\dots,n-1)}$$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

Le due soluzioni complesse di $w^2 = -7$ sono

$$w_0 = \sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{7}$$

$$w_1 = \sqrt{7}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i\sqrt{7}$$



Le soluzioni complesse di

$z^2 - 3z + 4 = 0$ sono

$$z_0 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{e}$$

$$z_1 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

OSSERVAZIONE. Se x è un numero reale negativo, allora le sue radici quadrate complesse sono $i\sqrt{|x|}$ e $-i\sqrt{|x|}$.

Determinare le soluzioni complesse di

$$z^2 - iz + \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$$

$$a = 1,\ b = -i,\ c = \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

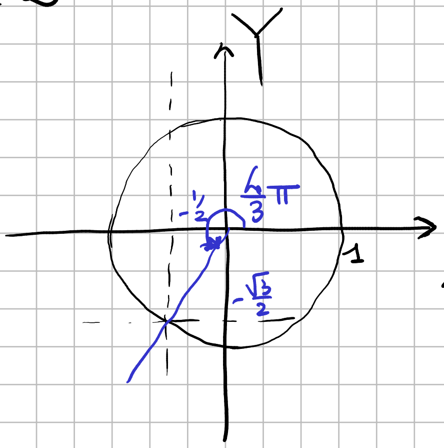
$$\Delta = (-i)^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{4}i = -1-\sqrt{3}i$$

Risolviamo $w^2 = -1-\sqrt{3}i$ in $\mathbb{C}$

$$\rho = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\vartheta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \vartheta = \frac{4}{3}\pi$$

Va bene



$$w^2 = 2e^{i\boxed{\frac{4}{3}\pi}} \leftarrow \vartheta$$

Le soluzioni hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomenti

$$\varphi_0 = \frac{\frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi = \frac{\vartheta + 2\cdot 0\cdot \pi}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi = \frac{\vartheta + 2\cdot 1\cdot \pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi_k = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n} \\ (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{array}}$$

Le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $w^2 = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}$ sono

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{2}{3}\pi} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{3}\pi} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Radici quadrate complesse di Δ

Le soluzioni complesse di $z^2 - iz + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ sono

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(i - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{2+\sqrt{6}}{4} \quad \text{e}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(i + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{2-\sqrt{6}}{4}$$

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ che appartengono all'intersezione $A \cap B$, con

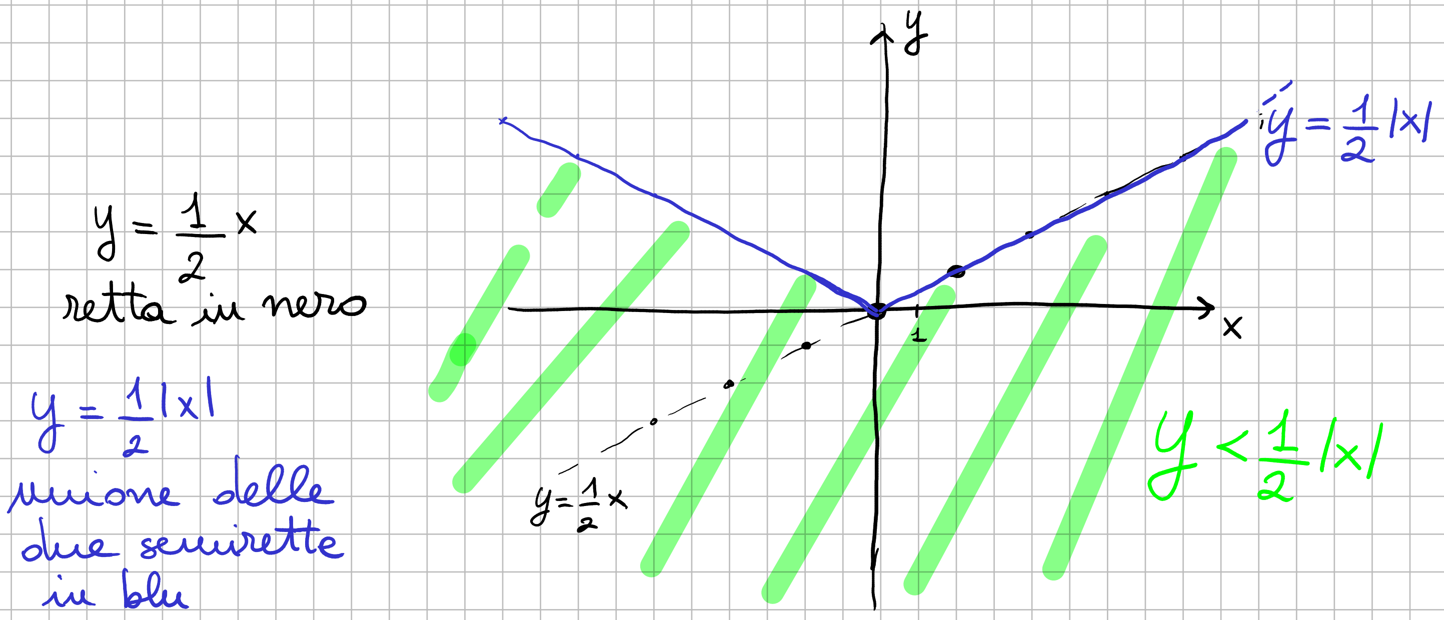
$$A = \{ z \in \mathbb{C} : z^4 + 2^4 = 0 \}$$ e

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2} |\operatorname{Re} z| < 0 \right\}.$$

Poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

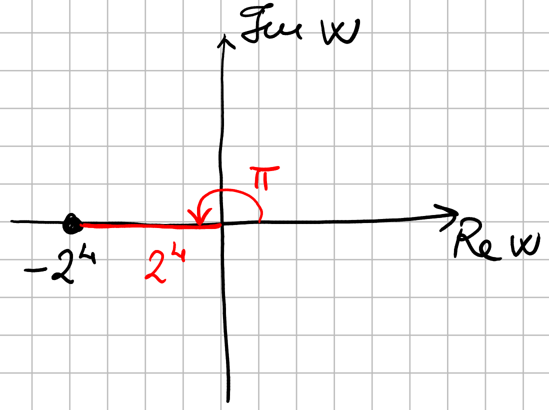
B è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ rappresentato dalla disequazione $y - \frac{1}{2}|x| < 0$

$$y < \frac{1}{2}|x|$$



L'insieme B è la regione del piano "al di sotto" delle semirette descritte dall'equazione $y = \frac{1}{2}|x|$.

Per determinare gli elementi dell'insieme B, risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 = \boxed{-2^4} \leftarrow w$



$\rho = |w| = 2^4$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\boxed{-2^4} \leftarrow \text{Re } w}{\boxed{2^4} \leftarrow |w|} \\ \sin\vartheta = \dfrac{\boxed{0} \leftarrow \text{Im } w}{\boxed{2^4} \leftarrow |w|} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\vartheta = -1 \\ \sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

$\vartheta = \pi$ va bene

$$z^{\boxed{4} \leftarrow n} = 2^4 e^{i\boxed{\pi} \leftarrow \vartheta}$$

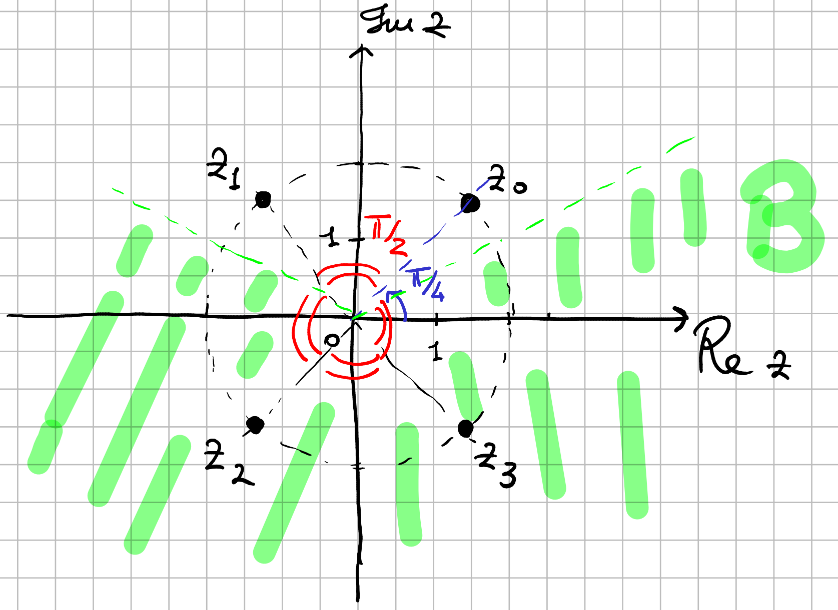
Le soluzioni complesse ha modulo $\sqrt[4]{2^4} = 2$ e argomenti

$\varphi_0 = \dfrac{\pi}{\boxed{4}} \leftarrow n$

$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3}{4}\pi$

$\varphi_2 = \dfrac{3}{4}\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5}{4}\pi$

$\varphi_3 = \dfrac{5}{4}\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{7}{4}\pi$



$A = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, dove

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{7}{4}\pi} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

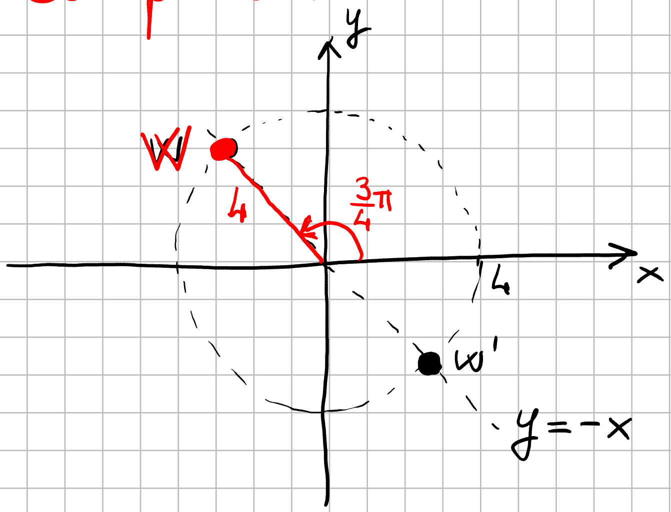
Ne ricaviamo che $A \cap B = \{z_2, z_3\}$.

(Simile a es. 4 dell'08/07/2025)

Sia $w \in \mathbb{C}$ la soluzione del sistema

$$\begin{cases} |w| = 4 \\ \mathrm{Im}(w) + \mathrm{Re}(w) = 0 \\ \mathrm{Re}(w) < 0 \end{cases}$$

Calcolare le radici complesse quarte di w, scriverle in forma esponenziale e rappresentarle nel piano complesso.



$w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$|w| = 4$ rappresenta la circonferenza con centro l'origine degli assi e raggio 4

$\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Re}(w) = 0$ si può riscrivere come

$y + x = 0$, cioè $y = -x$, che rappresenta la retta bisettrice del II e del IV quadrante.

Quindi la soluzione del sistema è uno dei due numeri complessi w e w' in figure.

Quello che ha parte reale minore di 0 è w.

Allora $w = \boxed{4}\, e^{i \boxed{\frac{3}{4}\pi}}$ ← perché la II equazione del sistema rappresenta la bisettrice dei quadranti II e IV, e $\text{Re}(w)<0$.

↑ perché la I equazione del sistema è $|w|=4$

Risolviamo $z^4 = 4 e^{i\frac{3}{4}\pi}$ in $\mathbb{C}$

$$r = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi_k = \frac{\frac{3\pi}{4}}{4} + \frac{2k\pi}{4} \quad (k=0,1,2,3)$$

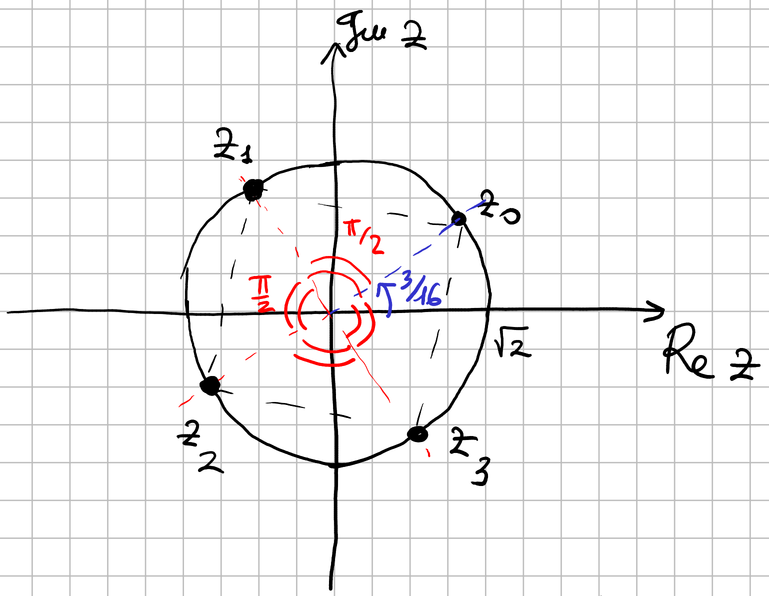
$$\varphi_0 = \frac{3}{16}\pi \qquad \varphi_1 = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{11}{16}\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{11}{16}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{19}{16}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{19}{16}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{27}{16}\pi$$

Le radici complesse quarte di w sono

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{16}\pi}, \quad z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11}{16}\pi},$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{19}{16}\pi}, \quad z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{27}{16}\pi}.$$



z_0, z_1, z_2, z_3 appartengono alla crf. con centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$, e sono i vertici di un quadrato.

Calcolare le radici complesse dell'equazione

$$z^4 - i\,|i-1|^2 z = 0$$

Da <u>non</u> confondere con

$$(i-1)^2 = i^2 + 1 - 2i = -2i$$

$$|i-1|^2 = (\underbrace{\boxed{-1}}_{\text{parte reale}})^2 + \underbrace{\boxed{1}}_{\text{parte immaginaria}}^2 = 2$$

L'equazione da risolvere è $z^4 - 2iz = 0$

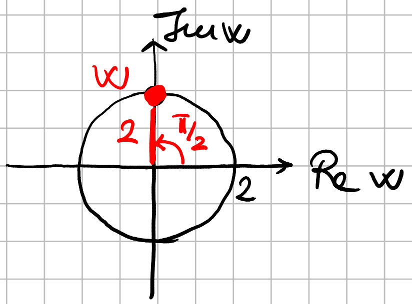
$$z(z^3 - 2i) = 0$$

$$z = 0 \quad \vee \quad z^3 - 2i = 0$$

$$z^3 = 2i$$

Ricaviamo le radici cubiche complesse di $w = 2i$

$$z^3 = \underbrace{\boxed{2}}_{\rho}\, e^{i\overbrace{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta}}$$



$$r = \sqrt[3]{2}$$

$$\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\varphi_2 = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Le radici cubiche complesse di $w = 2i$ sono

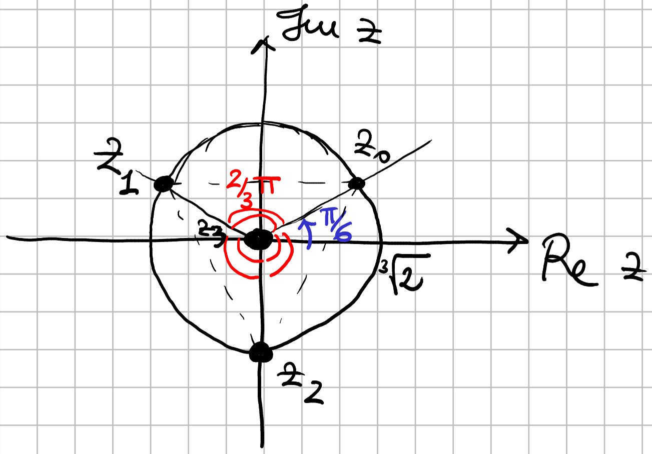
$$z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{1/3}}{2^1}(\sqrt{3}+i) = 2^{-\frac{2}{3}}(\sqrt{3}+i)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5}{6}\pi} = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 2^{-2/3}(-\sqrt{3}+i)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(0-i) = -i\sqrt[3]{2}$$

Le soluzioni complesse dell'equazione data

sono z_0, z_1, z_2 e $z_3 = 0$.



Determinare le radici cubiche complesse, scritte in forma esponenziale, di

$$W = \frac{2^{-|1-i\sqrt{19}|^2}(7+7i)(1-i)^{40}}{2i^{32}+e^{3i\pi}}$$

- $|1-i\sqrt{19}|^2 = 1^2+(-\sqrt{19})^2 = 20$
- $2i^{32}+e^{3i\pi} =$

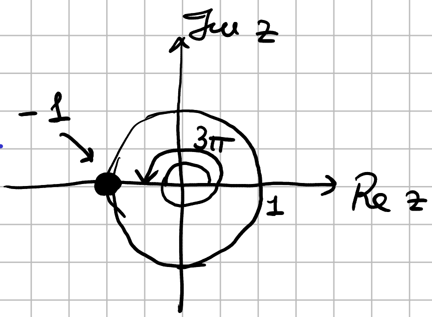
$= 2\cdot 1 - 1 = 1$

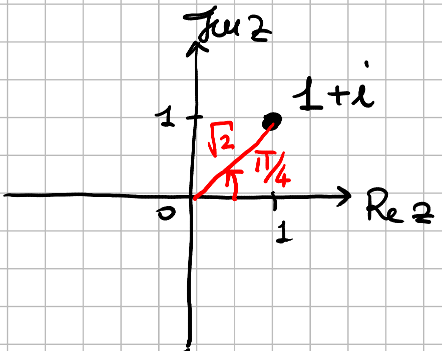
$i^0 = 1$ $\quad i^4 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

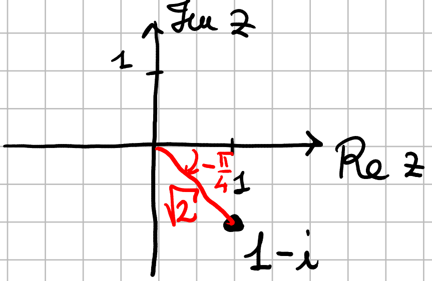
$i^3 = -i$





- $7+7i = 7(1+i) =$

$= 7\cdot\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$



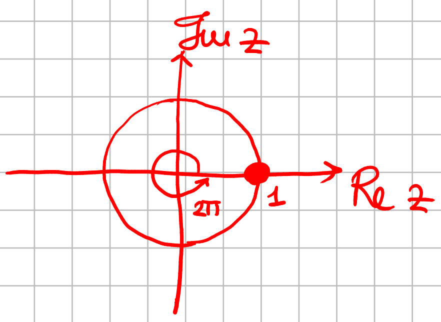
- $(1-i)^{40} =$

$= \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{40} =$

$= \left(2^{1/2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{40} =$

$= 2^{20}\underbrace{e^{-10i\pi}} = 2^{20}$

$e^{-10i\pi} = e^{i2\cdot(-5)\pi} = 1$



$$W = \frac{2^{-20} \cdot 7\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2^{20}}{1} .$$

$$W = 7\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

CONCLUSIONE NELL'ESERCITAZIONE
DEL 09/10/2025