

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 2 ottobre 2025

1. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$w_1 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \quad \text{e} \quad w_2 = (2e^{-5i\pi})^3 \left(e^{2-\frac{4i\pi}{3}}\right)^2.$$

2. Calcolare il modulo di $w = e^{3\log 2 - i\sqrt{7}}$.

3. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z + 2\bar{z}| = 2$.

4. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} (z + \bar{z})^2 + \left[i \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z - \bar{z}} + iz \right) \right]^2 + 1 = 0 \\ \operatorname{Im}(\bar{z}^2) < 0. \end{cases}$$

5. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{3z - 4i}{1 - iz} \in \mathbb{R}.$$

6. Ricavare le formule di duplicazione per il seno e per il coseno applicando la formula di De Moivre.

7. (Tema d'esame 10 luglio 2018) Determinare il luogo geometrico dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^2 - 4i\bar{z} + 6\operatorname{Im}(z) = -e^{11\pi i}.$$

8. (Tema d'esame 1 settembre 2017) Sia A il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z - i| \leq 3 \\ \operatorname{Re} \left(\frac{iz + 7\bar{z} + 1}{|z|^2 + 2} \right) \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare l'area di A .

Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

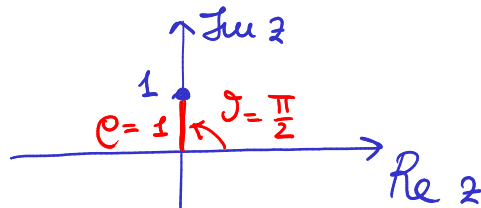
$$w_1 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \quad \text{e} \quad w_2 = (2e^{-5i\pi})^3 \left(e^{2-\frac{4i\pi}{3}} \right)^2.$$

Potenze di i con esponente naturale

$$\begin{aligned} i^0 &= 1, & i^1 &= i, & i^2 &= -1, & i^3 &= -i, \\ i^4 &= 1, & i^5 &= i, & i^6 &= -1, & i^7 &= -i, \\ i^8 &= 1, & \dots \end{aligned}$$

$$e^{2+2k\pi i} = e^2 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$



$$i^5 = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i(2\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$w_1 = \frac{2i^5 e^{-i\frac{3}{2}\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2i e^{-i\frac{3}{2}\pi - i\frac{\pi}{4}} = 2i e^{-i\frac{7}{4}\pi} =$$

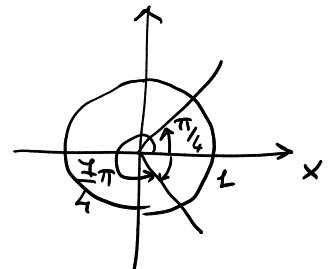
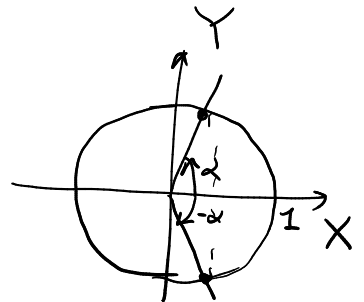
$$= 2i \left(\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right) \right) =$$

$$= 2i \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) - i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) \right) =$$

$$= 2i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = i\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Re}(w_1) = -\sqrt{2} \quad \operatorname{Im}(w_1) = \sqrt{2}$$

$$|w_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$



$$w_2 = (2e^{-5i\pi})^3 (e^{2-\frac{4i\pi}{3}})^2 =$$

$$= (2e^{-i\pi})^3 \cdot e^{4-\frac{8i\pi}{3}} =$$

$$= 8e^{-3i\pi} \cdot e^{4-\frac{8i\pi}{3}} =$$

$$= 8e^{i\pi} \cdot e^4 \cdot e^{-\frac{8i\pi}{3}} =$$

$$= 8e^4 \cdot e^{i(\pi-\frac{8\pi}{3})} =$$

$$= 8e^4 \cdot e^{i(-\frac{5\pi}{3})} =$$

$$= 8e^4 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \right) =$$

$$= 8e^4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) =$$

$$= 8e^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4e^4 + 4e^4\sqrt{3}i$$

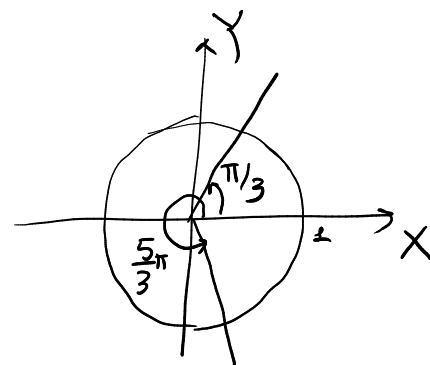
$$\operatorname{Re}(w_2) = 4e^4 \quad \operatorname{Im}(w_2) = 4e^4\sqrt{3}$$

Per calcolare il modulo di w_2 , conviene considerare il passaggio in cui abbiamo scritto $w_2 = 8e^4 e^{i(-\frac{5\pi}{3})}$

questo è il modulo di w_2

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$



Calcolare il modulo di $w = e^{3\log 2 - i\sqrt{7}}$.

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cdot (\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)) \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}$$

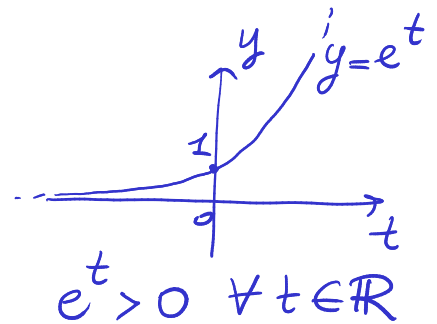
$$|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z} \cdot (\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z))| =$$

$$= |e^{\operatorname{Re} z}| \cdot |\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)| =$$

$$= |e^{\operatorname{Re} z}| \cdot \sqrt{\cos^2(\operatorname{Im} z) + \sin^2(\operatorname{Im} z)} =$$

$$= |e^{\operatorname{Re} z}| \cdot \sqrt{1} = |e^{\operatorname{Re} z}| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Questo equivale a
 $|e^{i\theta}| = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$



parte reale dell'esponente

$$|w| = |e^{\boxed{3\log 2} - i\sqrt{7}}| = e^{3\log 2} = e^{\log 2^3} = e^{\log 8} = 8$$

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z + 2\bar{z}| = 2$

$$z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x + iy + 2(x - iy)| = 2$$

$$|x + iy + 2x - 2iy| = 2$$

$$|3x - iy| = 2$$

$$\sqrt{(3x)^2 + (-y)^2} = 2$$

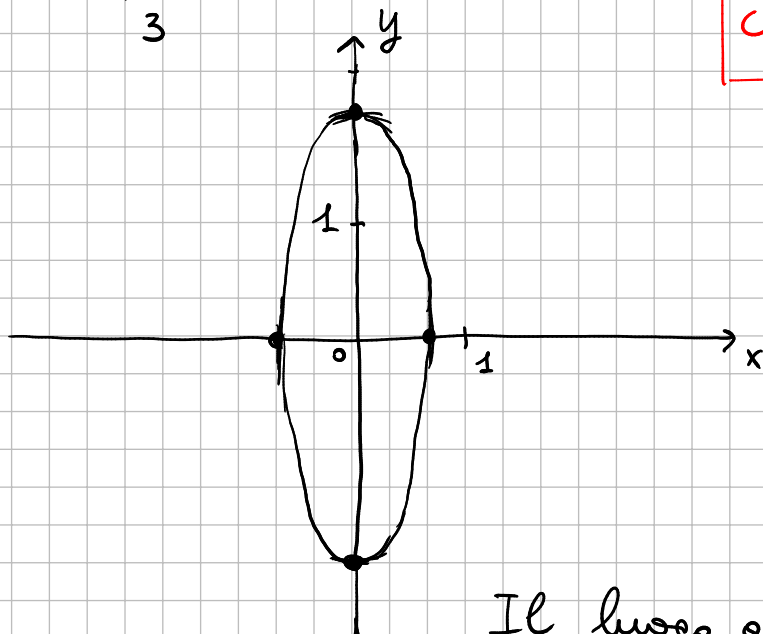
$$9x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{9}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$b = 2$$



DEFINIZIONE DI MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO w

$$|w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2}$$

↙ elevando al quadrato entrambi i membri (perché è lecito?)

In $\mathbb{R}^2$ un'equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$, rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x se $a > b$ o con i fuochi sull'asse y se $a < b$

Per la rappresentazione grafica, è sufficiente trovare i punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Il luogo geometrico cercato è l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(\bar{z}^2) < 0 \\ (z + \bar{z})^2 + \left[i \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z - \bar{z}} + iz\right) \right]^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2$$

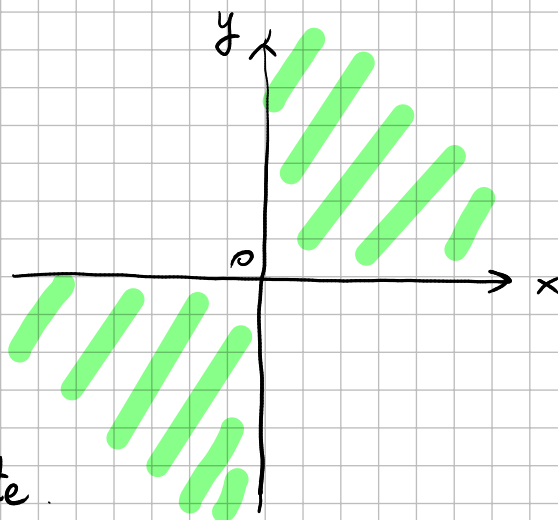
$$\bullet \operatorname{Im}(\bar{z}^2) = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + i(-2xy)) = -2xy$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^2) < 0$$

$$-2xy < 0$$

$$xy > 0$$

Questa disuguaglianza rappresenta l'unione del I e del III quadrante.



$$\bullet z + \bar{z} = x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} = 2x$$

$$\bullet z - \bar{z} = \cancel{x} + iy - \cancel{x} + iy = 2iy$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(z + \bar{z})^2 + \left[i \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z - \bar{z}} + iz\right) \right]^2 + 1 = 0$$

$$(2x)^2 + \left[i \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2iy} + i(x + iy)\right) \right]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 + \left[i \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2iy} \cdot \frac{i}{i} + ix - y \right) \right]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 + \left[i \operatorname{Re} \left(\frac{i}{-2y} + ix - y \right) \right]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 + \left[i \operatorname{Re} \left(\underbrace{-y}_{\text{PARTE REALE}} + i \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2y} + x \right)}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}} \right) \right]^2 + 1 = 0$$

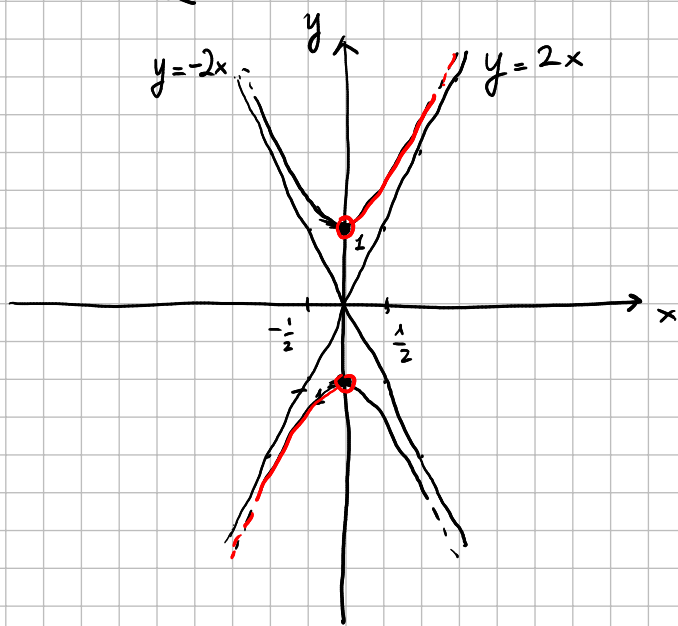
$$4x^2 + [i \cdot (-y)]^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 - y^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 - y^2 = -1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = -1$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 1$$



Un'iperbole in $\mathbb{R}^2$ ha equazione della forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$\uparrow$ $a, b > 0$
fuochi sull'asse x

$\uparrow$
fuochi sull'asse y

Sono asintoti dell'iperbole le rette di equazioni $y = \pm \frac{b}{a}x$

Il luogo geometrico è l'intersezione tra l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = -1$ e l'unione dei quadranti I e III.

Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$
tali che $\frac{3z-4i}{1-iz} \in \mathbb{R}$

Un numero complesso w è reale se e solo se $\text{Im}(w) = 0$

$$\text{Im}\left(\frac{3z-4i}{1-iz}\right) = 0 \quad z = x+iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im}\left(\frac{3x+3iy-4i}{1-i(x+iy)}\right) = 0$$

$$\text{Im}\left(\frac{3x+i(3y-4)}{1-ix+y}\right) = 0$$

$$\text{Im}\left(\frac{3x+i(3y-4)}{(1+y)-ix} \cdot \frac{(1+y)+ix}{(1+y)+ix}\right) = 0$$

$$\text{Im}\left(\frac{3x(1+y)+i3x^2+i(3y-4)(1+y)-x(3y-4)}{(1+y)^2+x^2}\right) = 0$$

$$\text{Im}\left(\underbrace{\frac{3x(1+y)-x(3y-4)}{(1+y)^2+x^2}}_{\text{parte reale}} + i \cdot \underbrace{\frac{3x^2+3y+3y^2-4-4y}{(1+y)^2+x^2}}_{\text{parte immaginaria}}\right) = 0$$

$$\frac{3x^2+3y+3y^2-4-4y}{(1+y)^2+x^2} = 0$$

$$3x^2+3y^2-y-4=0$$

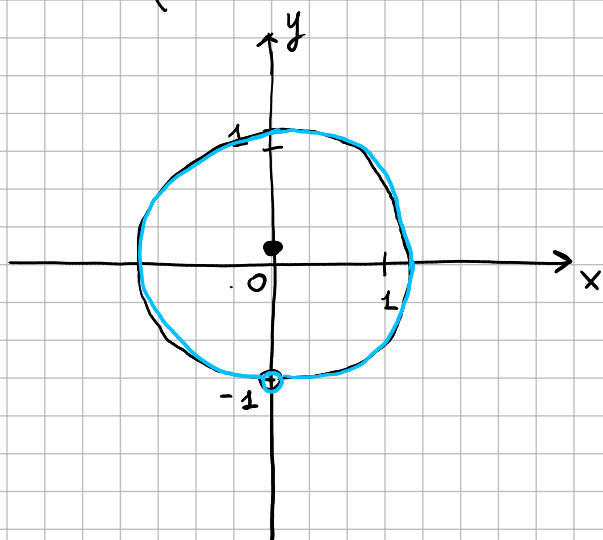
Condizioni di esistenza
 $(x, y) \neq (0, -1)$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} = 0$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{36}$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

L'equazione rappresenta la crf. di raggio $\frac{7}{6}$ e
centro $\left(0, \frac{1}{6}\right)$



Il luogo geometrico cercato
è la crf. di raggio $\frac{7}{6}$ e
centro $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ privata del
punto $(0, -1)$

FORMULE DI DUPLICAZIONE PER SENSO e COSENDO

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

FORMULA di DE MOIVRE

Se $\vartheta \in \mathbb{R}$ generico e $n=2$, si ha

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^2 = \cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta)$$

↑
formule di De Moivre

$$\cos^2 \vartheta + 2i \sin \vartheta \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta = \cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta)$$

$$(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + i \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta)$$

Due numeri complessi sono uguali se e solo se le loro parti reali sono uguali e le loro parti immaginarie sono uguali.

Quindi

$$\begin{aligned} \cos(2\vartheta) &= \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & \forall \vartheta \in \mathbb{R} & \text{ e} \\ \sin(2\vartheta) &= 2 \sin \vartheta \cos \vartheta & \forall \vartheta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

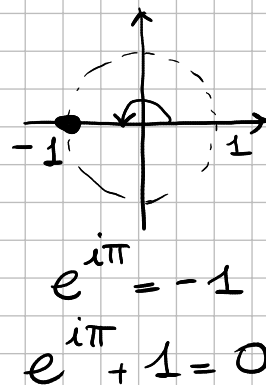
Determinare il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^2 - 4i\bar{z} + 6\operatorname{Im}(z) = -e^{i\pi}$

$$z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$(x + iy)^2 - 4i(x - iy) + 6y = -e^{i\pi}$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 - 4ix - 4y + 6y = -(-1)$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 + 2y - 1}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{(2xy - 4x)}_{\text{parte immaginaria}} = 0$$



$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ 2xy - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ 2x(y - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 4 + 4 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+1)(x-1) = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il luogo geometrico cercato è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato dai punti $(0, 1)$, $(-1, 2)$ e $(1, 2)$.

Sia A il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

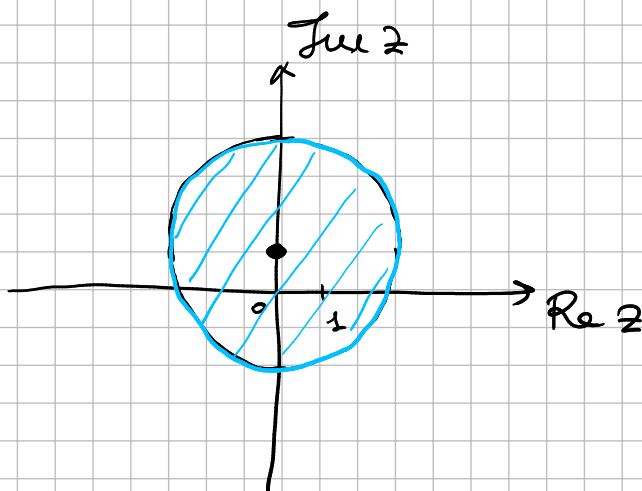
$$\begin{cases} |z-i| \leq 3 \\ \operatorname{Re} \left(\frac{iz + 7\bar{z} + 1}{|z|^2 + 2} \right) \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare l'area di A .

- $|z-i| = 3$ è l'equazione della circonferenza di centro i e raggio 3

DISTANZA DI UN
NUMERO COMPLESSO
 z DA i

La disuguaglianza $|z-i| \leq 3$ rappresenta il cerchio delimitato dalla crf. di centro i e raggio 3 , incluse la crf. stessa.



- $\operatorname{Re} \left(\frac{iz + 7\bar{z} + 1}{|z|^2 + 2} \right) \geq 0$ $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{ix - y + 7x - 7iy + 1}{x^2 + y^2 + 2} \right) \geq 0$$

$$\operatorname{Re} \left(\underbrace{\frac{7x - y + 1}{x^2 + y^2 + 2}}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{\frac{x - 7y}{x^2 + y^2 + 2}}_{\text{parte immaginaria}} \right) \geq 0$$

$$\frac{7x - y + 1}{x^2 + y^2 + 2} \geq 0$$

Osservazione

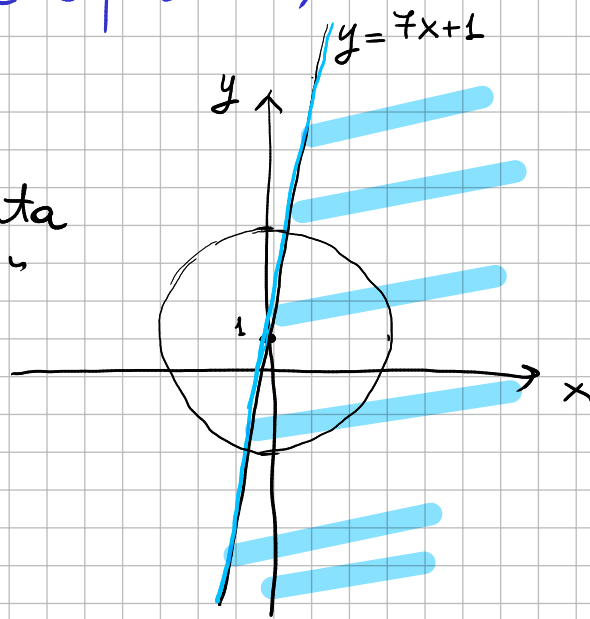
$$x^2 + y^2 + 2 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$7x - y + 1 \geq 0$$

(Dal passaggio precedente, moltiplicando entrambi i membri per il denominatore, che è positivo)

$$y \leq 7x + 1$$

La disuguaglianza rappresenta il semipiano "al di sotto" della retta di equazione $y = 7x + 1$, inclusa la retta stessa.



Il luogo geometrico A è un semicerchio del cerchio di raggio $(0, 1)$ e raggio 3, quindi ha area $\frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi$.