

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 1° ottobre 2025

Prima parte – Domini di funzioni

1. Si consideri la funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x} & \text{se } x < 0 \\ 2 \cos x - \sqrt{3} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\pi \\ e^{2/x} \arctan(12x - x^2 - 20) & \text{se } x > 2\pi. \end{cases}$$

Determinare il dominio della funzione e determinare l'insieme $A = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \geq 0\}$.

2. Determinare il dominio della funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

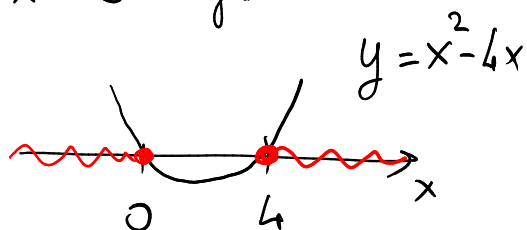
$$f(x) = (x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x})^{\log(e-x)}.$$

Si consideri la funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x} & \text{se } x < 0 \\ 2 \cos x - \sqrt{3} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\pi \\ e^{2/x} \arctan(12x - x^2 - 20) & \text{se } x > 2\pi. \end{cases}$$

Determinare il dominio della funzione e determinare l'insieme $A = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \geq 0\}$.

• $\sqrt{x^2 - 4x}$ è definito se e solo se $x^2 - 4x \geq 0$



Equazione associata

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

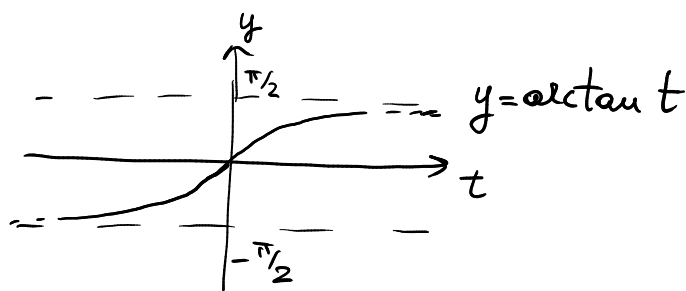
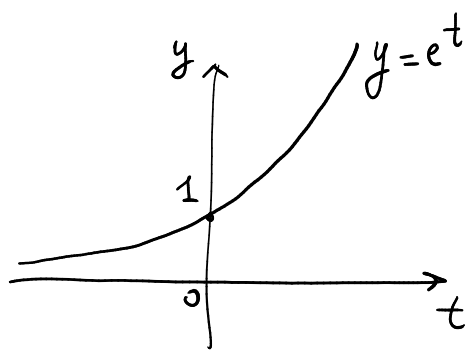
$$x = 0 \vee x = 4$$

$$x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 4$$

Quindi $\sqrt{x^2 - 4x}$ è definita per $x \leq 0 \vee x \geq 4$, dunque in particolare, per $x < 0$

• $2 \cos x - \sqrt{3}$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi anche per $x \in [0, 2\pi]$

• $e^{2/x} \arctan(12x - x^2 - 20)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi anche per $x > 2\pi$



Ne segue che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

• $x < 0$

$$\sqrt{x^2 - 4x} \geq 0 \text{ per ogni } x \leq 0 \vee x \geq 4$$



Quindi $f(x) \geq 0$ se $x < 0$

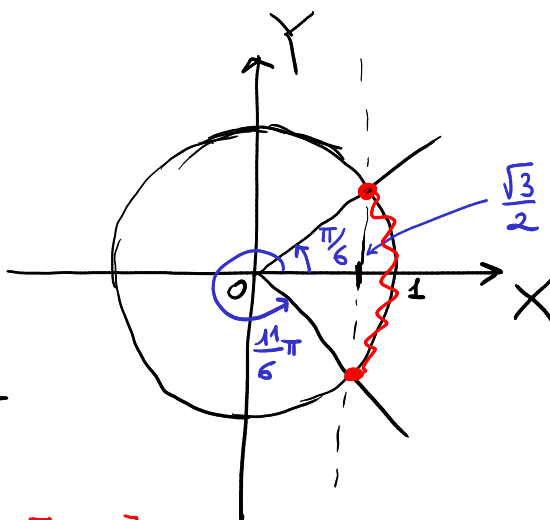
Dato che $\sqrt{x^2 - 4x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$, si ricava che $f(x) > 0$ se $x < 0$
 valori per cui il radicando = 0

• $0 \leq x \leq 2\pi$

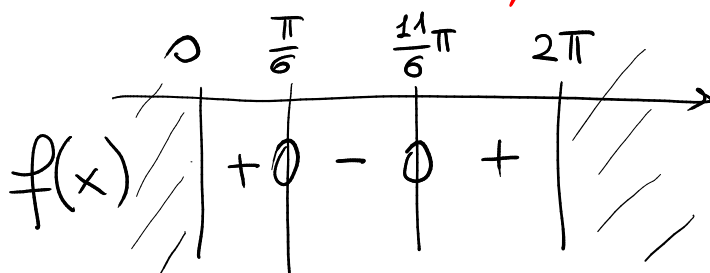
$$2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$$

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \vee \frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$$



Soluzioni in $[0, 2\pi]$



• $x > 2\pi$

• $e^{2/x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

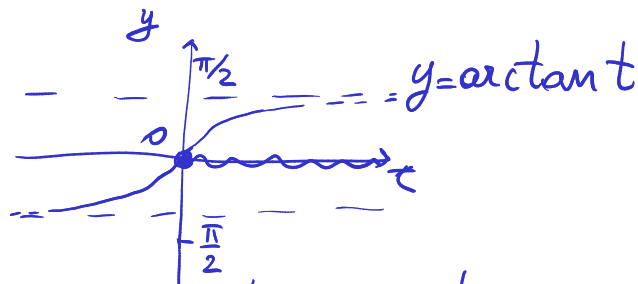
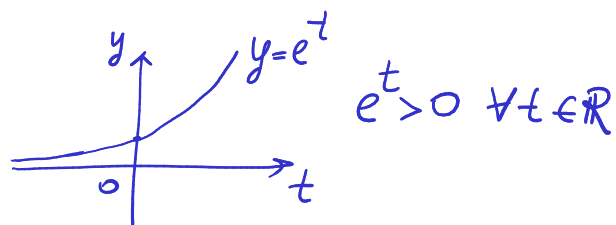
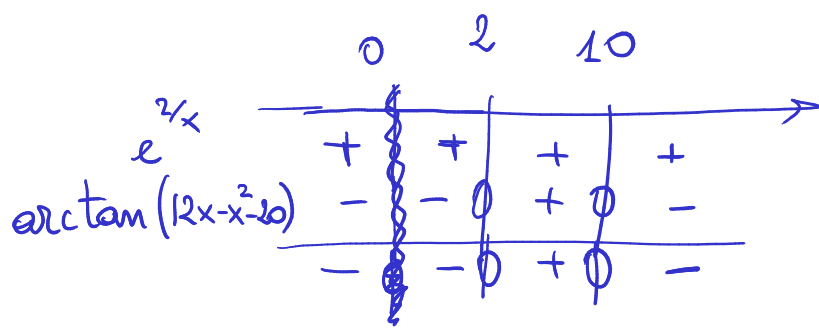
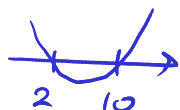
• $\arctan(12x - x^2 - 20) \geq 0$

$$12x - x^2 - 20 \geq 0$$

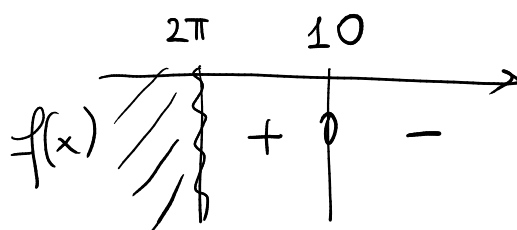
$$x^2 - 12x + 20 \leq 0$$

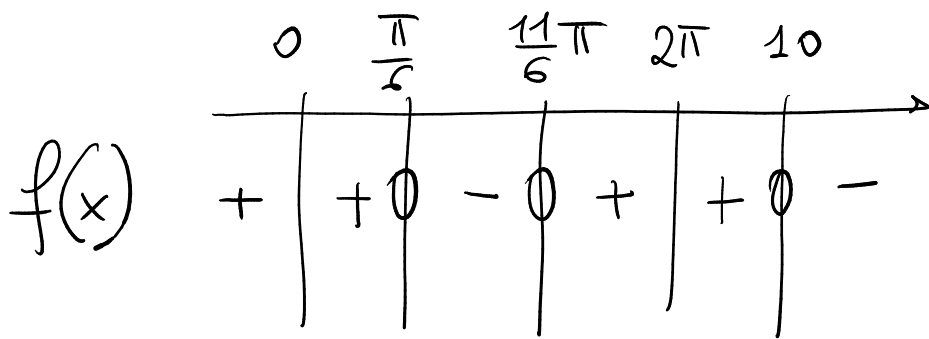
$$(x-10)(x-2) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 10$$



$$\arctan t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$$





$$A = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \geq 0\} = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 10\right]$$

Determinare il dominio della funzione $f: \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x})^{\log(e-x)}.$$

$$\begin{cases} x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} > 0 & \text{base positiva (va bene qualunque esponente reale)} \\ x^2 - 2x \geq 0 \\ e - x > 0 \end{cases} \text{ perché il log all'esponente sia definito}$$

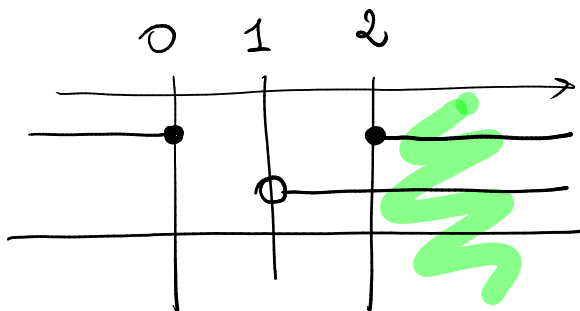
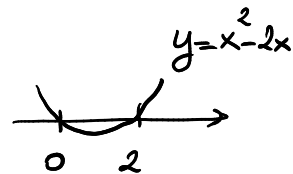
$$\bullet \quad x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} > 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x} < x - 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 1 \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x} < x - 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x < (x - 1)^2 \end{cases}$$

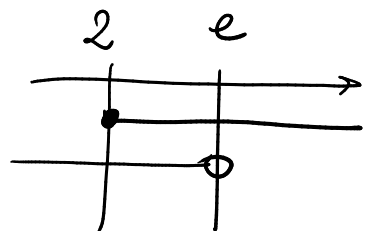
~~disuguaglianza impossibile~~

$$\begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x > 1 \\ x^2 - 2x < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ x > 1 \\ 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$$x \geq 2$$

$$\begin{cases} x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} > 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \\ e - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < e \end{cases}$$



$$\text{dom}(f) = [2, e)$$

Analisi Matematica 1 – Esercitazione del 1° ottobre 2025

Seconda parte – Numeri complessi

1. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi

$$w_1 = \frac{7i}{2-i} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{(3-i)\left(-\frac{2}{3}i-1\right)}{1+3i}.$$

Individuare la parte reale e la parte immaginaria, e calcolare il modulo di ciascuno.

2. Scrivere in forma trigonometrica e in forma esponenziale i numeri complessi

$$w_1 = \frac{5}{6i}, \quad w_2 = 5 - 5i, \quad w_3 = -2e^{i\frac{\pi}{9}}.$$

3. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re}(z) \cdot (|z+1-i|-3) \geq 0$.

4. (Tema d'esame 7 settembre 2016) Determinare il luogo geometrico A dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z+2|^2 + \operatorname{Re}((z-i)^2) = 3 \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0. \end{cases}$$

5. Determinare e rappresentare graficamente (identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$) il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = 3$.

Scrivere in forma algebrica $w_1 = \frac{7i}{2-i}$

$z \in \mathbb{C}$ è scritto in forma algebrica se è nella forma $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

Il coniugato di un numero complesso $z = x + iy$ è $\bar{z} = x - iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$w_1 = \frac{7i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{14i - 7}{2^2 + (-1)^2} =$$

$$= \frac{14i - 7}{5} = \boxed{-\frac{7}{5} + \frac{14}{5}i}$$

← forma algebrica o
forma cartesiana

$$\operatorname{Re}(w_1) = -\frac{7}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(w_1) = \frac{14}{5}$$

$$|w_1| = \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 (1+2^2)} = \frac{7}{5}\sqrt{5}$$

Scrivere in forma algebrica

$$w_2 = \frac{(3-i)\overline{(-\frac{2}{3}i-1)}}{1+3i}$$

$$w_2 = \frac{(3-i)\left(-1+\frac{2}{3}i\right)}{1+3i} = \frac{-3+2i+i+\frac{2}{3}}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} =$$

$$= \frac{\left(3i - \frac{7}{3}\right)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{3i+9-\frac{7}{3}+7i}{10} = \frac{\frac{20}{3}+10i}{10} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} + i} \leftarrow \text{forma algebrica di } w_2$$

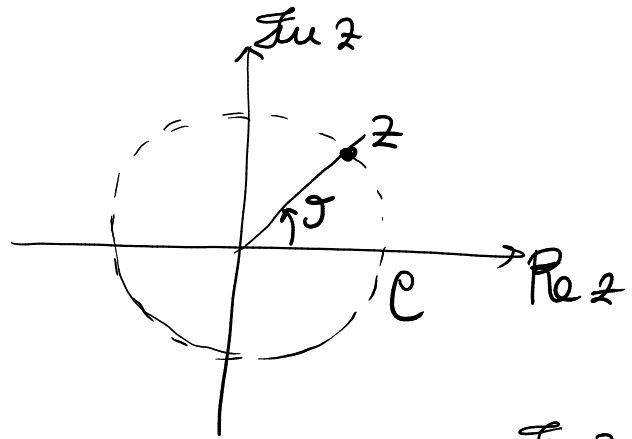
$$\operatorname{Re}(w_2) = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(w_2) = 1$$

LA PARTE IMMAGINARIA È UN NUMERO REALE

$$|w_2| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Scrivere in forme esponenziale e in forma trigonometrica $w_1 = \frac{5}{6i}$.

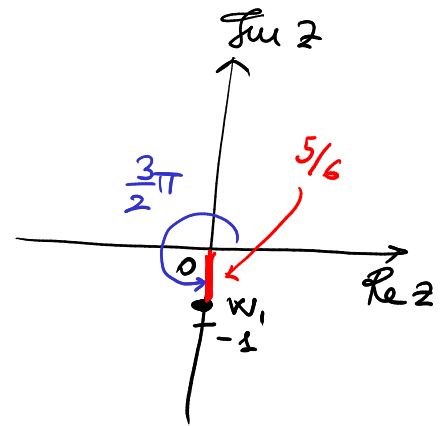
$z \in \mathbb{C}$ è scritto in forma trigonometrica se è nella forma $z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, dove $\rho \geq 0$ è il modulo e $\vartheta \in \mathbb{R}$ è detto argomento.



$$w_1 = \frac{5}{6i} = \frac{5}{6i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{5i}{-6} = -\frac{5}{6}i$$

$$|w_1| = \frac{5}{6} = \rho$$

$\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ è un argomento di w_1 .



$$w_1 = \frac{5}{6} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

forma trigonometrica

$$w_1 = \frac{5}{6} e^{i \frac{3\pi}{2}}$$

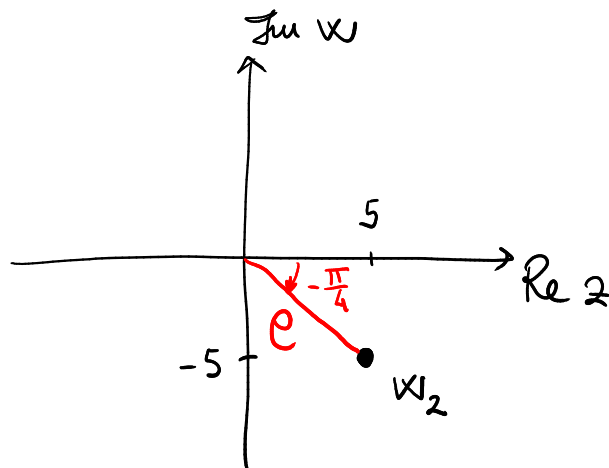
forma esponenziale

$$(e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R})$$

Si può anche scrivere $w_1 = \frac{5}{6} e^{-i \frac{\pi}{2}}$

Scrivere in forma trigon. e in forma esp.

$$w_2 = 5 - 5i$$



$$\rho = |w_2| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \frac{\operatorname{Re} w_2}{\rho} \\ \sin \vartheta = \frac{\operatorname{Im} w_2}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{5}{5\sqrt{2}} \\ \sin \vartheta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \vartheta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ va bene

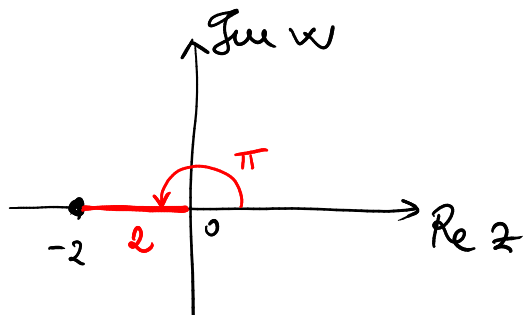
$$w_2 = 5\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{forma trig.}$$

$$w_2 = 5\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{forma esp.}$$

Scrivere in forma trig. e in forma esp.

$$w_3 = -2e^{i\pi/9}$$

Scriviamo -2 in forma esponenziale



$\rho = 2$ modulo
 $\vartheta = \pi$ argomento

-2 ha modulo 2

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \frac{-2}{2} \leftarrow \text{Parte reale di } -2 \\ \sin \vartheta = \frac{0}{2} \leftarrow \text{Parte immaginaria di } -2 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Modulo di -2

$$\begin{cases} \cos \vartheta = -1 \\ \sin \vartheta = 0 \end{cases} \quad \vartheta = \pi \text{ va bene}$$

$$-2 = 2e^{i\pi} \leftarrow \text{forma esponenziale di } -2$$

$$w_3 = -2e^{i\pi/9} = 2e^{i\pi} \cdot e^{i\pi/9} = 2e^{i(\pi + \pi/9)} = \underbrace{2e^{i\frac{10}{9}\pi}}_{\text{forma esp. di } w_3}$$

$$w_3 = 2 \left[\cos\left(\frac{10}{9}\pi\right) + i \sin\left(\frac{10}{9}\pi\right) \right] \leftarrow \text{forma trigonometrica di } w_3$$

Determinare e rappresentare graficamente il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Re}(z) \cdot (|z+1-i|-3) \geq 0.$$

Se z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ allora $|z_1 - z_2|$ è la distanza fra z_1 e z_2 .

Per esempio,

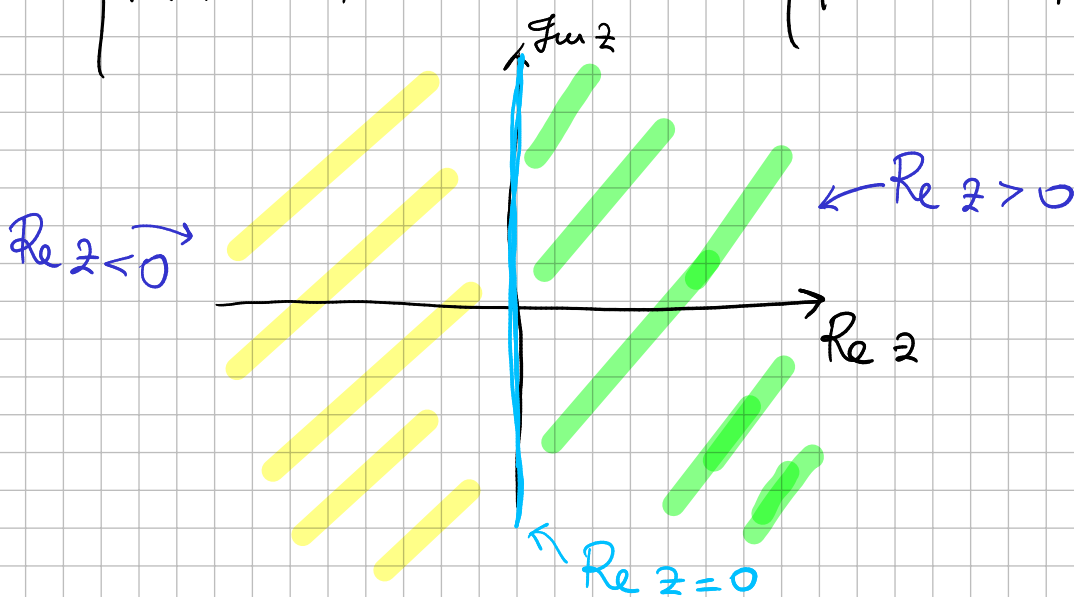
$|z+1-i| = |z - (-1+i)|$ è la distanza fra un generico $z \in \mathbb{C}$ e $-1+i$.

$$\operatorname{Re}(z) \cdot (|z+1-i|-3) \geq 0$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ |z+1-i|-3 \geq 0 \end{cases}$$

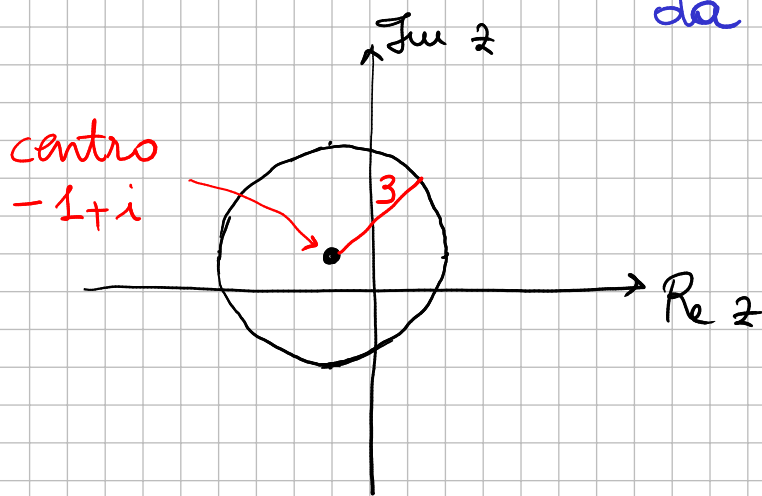
$$\vee \begin{cases} \operatorname{Re}(z) \leq 0 \\ |z+1-i|-3 \leq 0 \end{cases}$$



$$|z - (-1+i)| - 3 = 0$$

$$|z - (-1+i)| = 3$$

Sono i numeri complessi che hanno distanza uguale a 3 da $-1+i$

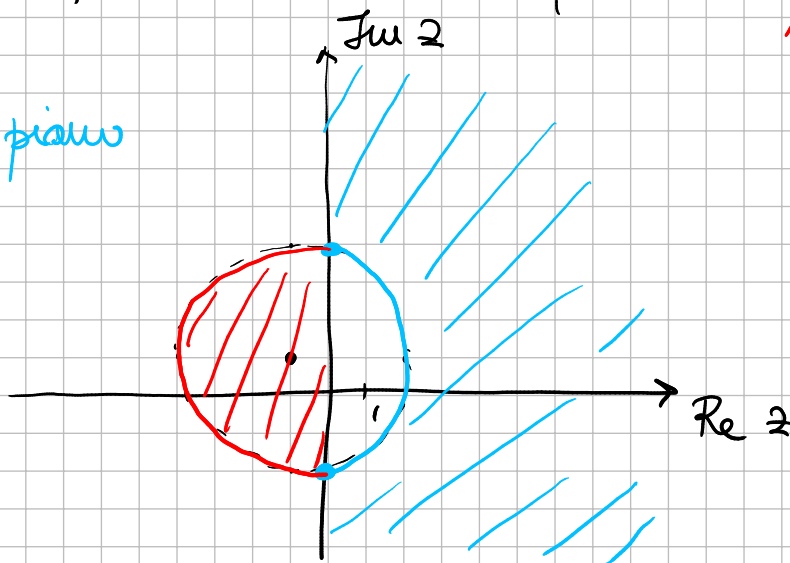


$$\begin{cases} \text{Re}(z) \geq 0 \\ |z + 1 - i| \geq 3 \end{cases}$$

↑
punti del piano
in azzurro

$$\begin{cases} \text{Re}(z) \leq 0 \\ |z + 1 - i| \leq 3 \end{cases}$$

↑
punti del
piano in
rosso



Il luogo geometrico cercato è l'unione delle parti rosse e azzurre.

Determinare il luogo geometrico Λ dei punti

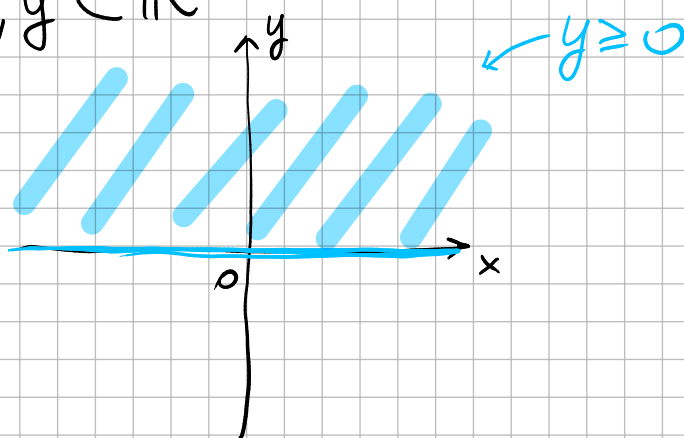
$z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |z+2|^2 + \operatorname{Re}((z-i)^2) = 3 \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0 \end{cases}$$

$$z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \operatorname{Im}(z) \geq 0$$

$$y \geq 0$$



$$\bullet |z+2|^2 + \operatorname{Re}((z-i)^2) = 3$$

$$|x+iy+2|^2 + \operatorname{Re}((x+iy-i)^2) = 3$$

$$|(x+2)+iy|^2 + \operatorname{Re}((x+i(y-1))^2) = 3$$

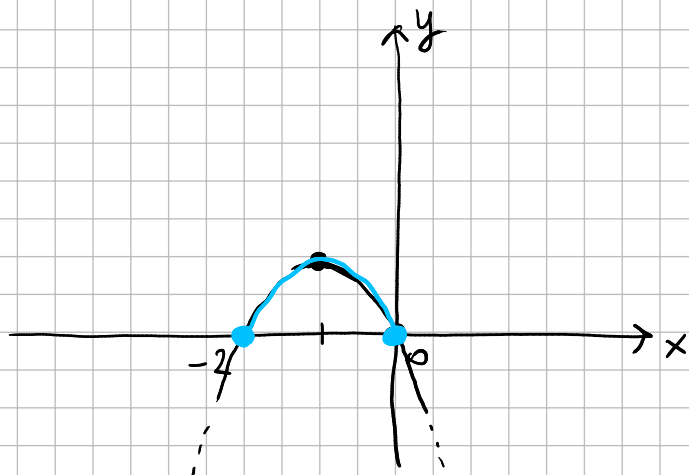
$$(x+2)^2 + y^2 + \operatorname{Re}(\underbrace{x^2 - (y-1)^2}_{\text{parte reale}} - \underbrace{2ix(y-1)}_{\text{parte immaginaria}}) = 3$$

$$(x+2)^2 + y^2 + x^2 - (y-1)^2 = 3$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + x^2 - y^2 - 1 + 2y = 3$$

$$2y = -2x^2 - 4x$$

$$y = -x^2 - 2x$$



$y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)
 rappresenta una parabola
 con asse di simm. verticale
 Il vertice della parabola
 ha ascisse $-\frac{b}{2a}$

$$-x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Il vertice ha ascissa -1 e

$$\text{ordinata } y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1$$

Il luogo geometrico cercato è l'arco della parabola
 di equazione $y = -x^2 - 2x$ contenuto nel semipiano
 $y \geq 0$, estremi inclusi.

Determinare e rappresentare graficamente il luogo geometrico degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right) = 3$$

$$z = x + iy, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{x + iy}\right) = 3$$

Condizioni di esistenza

$$x + iy \neq 0$$

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy}\right) = 3$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2x - 2iy}{x^2 + y^2}\right) = 3$$

$$\operatorname{Im}\left(\underbrace{\frac{2x}{x^2 + y^2}}_{\text{parte reale}} + i \underbrace{\frac{-2y}{x^2 + y^2}}_{\text{parte immaginaria}}\right) = 3$$

parte reale

parte immaginaria

$$\frac{-2y}{x^2 + y^2} = 3$$

$$3(x^2 + y^2) + 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

rappresenta una circonferenza in $\mathbb{R}^2$ se e solo se

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$$

In questo caso, il centro è

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ e il raggio è } \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

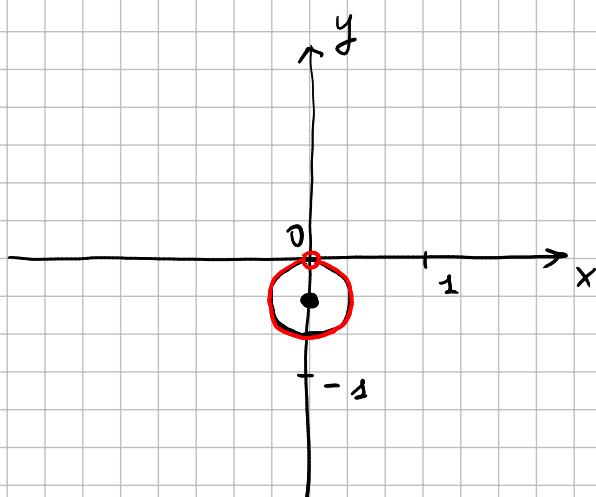
$$(x-0)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$\uparrow$
 Quadrato della distanza
 di (x,y) da $(0, -\frac{1}{3})$

$\nwarrow$
 Quadrato del raggio

Questa è l'equaz. della crf. con centro $(0, -\frac{1}{3})$
 e raggio $\frac{1}{3}$



Il luogo geometrico cercato è la crf. con centro $(0, -\frac{1}{3})$ e raggio $\frac{1}{3}$, privata del punto $(0,0)$.